SINTEZA LUCRĂRII TE_46, NR. 83/2010, ANUL 2013

MARIUS VLĂDOIU

INTRODUCERE

În perioada ianuarie–septembrie 2013, membrii grantului UEFISCDI, cu numarul 83/2010, PNII-RU cod TE_46/2010, program Resurse Umane, cu titlul ”Modelarea algebrică a unor obiecte combinatoriale si aplicaţii computaţionale”, au elaborat în total 5 lucrări. Mai precis, dintre acestea două au fost deja trimise spre publicare la reviste ISI importante, vezi [8], [9], iar trei sunt în curs de finalizare, vezi [40],[16] [46]. Totodată din lucrările finalizate şi raportate anul trecut [24] a apărut în Journal of Pure Applied Algebra, pe când [27] a fost acceptată spre publicare în Mathematische Nachrichten. În plus, pentru aceste lucrari vor fi disponibile linkuri din pagina de web a grantului http://gta.math.unibuc.ro/pages/mv/em.htm. In cele ce urmeaza prezentăm detaliat rezultatele principale obţinute în lucrările finalizate [8], [9]. Dorim să menţionăm că pentru cele 3 lucrări în curs de finalizare [40],[16],[46], titlurile s-ar putea să mai sufere modificări, însă vor exista link-uri către ele din pagina de web a grantului imediat ce vor fi finalizate. Totodată vrem să precizăm că pentru acest an am avut prevăzute realizarea unui articol care să fie trimis spre publicare şi apariţia unui articol, dar după cum se poate vedea de mai sus am depaşit acest număr.

1. REZULTATE STIINTIFICE PRINCIPALE

1. Lucrarea ”Markov bases of lattice ideals” [8] a fost elaborată în colaborare de Hara Charalambous, Apostolos Thoma şi Marius Vlădoiu şi a fost trimisă spre publicare la o prestigioasă revistă ISI. Fie $R = K[x_1,\dots,x_n]$ inelul polinoame în n nedeterminate peste corpul K, şi fie L o latice în $\mathbb{Z}^n$. Idealul laticial I_L se defineşte ca fiind idealul generat de următoarele binoame:

$$I_L := \langle x^u - x^v :\ u - v \in L\rangle\ .$$

Fie $\mu(I_L)$ cel mai mic cardinal al unui sistem minimal de generatori al lui I_L, care constă din binoame. Numim *bază Markov* a lui I_L un sistem minimal de generatori ai lui I_L de cardinal $\mu(I_L)$. Studiul idealelor a fost iniţiat odată cu lucrările fundamentale [32, 46]. Mai mult, idealele laticiale au aplicaţii în diverse domenii ale matematicii, precum algebra statistică [12, 36], programare întreagă [14], ecuaţii diferenţiale hipergeometrice [13], teoria grafurilor [35], etc. Vrem să remarcăm că ele au fost pentru prima dată sttudiate într-un mod sistematic în [15] şi că idealele torice sunt ideale laticiale I_L pentru care laticea L este nucleul unei matrici cu intrări întregi. De asemenea trebuie menţionat că aproape toate rezultatele din literatura de specialitate sunt despre latici L astfel încât $L\cap\mathbb{N}^n = \{\mathbf{0}\}$, excepţiile fiind lucrările [15, 29, 18, 21, 30]. Dacă L este astfel încât $L\cap\mathbb{N}^n = \{\mathbf{0}\}$ spunem că L este *pozitiv graduată*. Fie $\mathscr{A}$ semigrupul lui $\mathbb{Z}^n/L$ generat de elementele $\{\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i + L : 1 \le i \le n\}$, unde $\{\mathbf{e}_i :\ 1 \le i \le n\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{Z}^n$ şi fie

$$\deg_{\mathscr{A}}(x^v) := v_1\mathbf{a}_1 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n \in \mathscr{A}$$

unde $x^v = x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}$. Rezultă că

$$I_L = \langle x^u - x^v : \deg_{\mathscr{A}}(x^u) = \deg_{\mathscr{A}}(x^v) \rangle$$

şi că I_L este $\mathscr{A}$-graduat. Când L este pozitiv graduat, semigrupul $\mathscr{A}$ este parţial ordonat:

$$\mathbf{c} \geq \mathbf{d} \iff \text{există } \mathbf{e} \in \mathscr{A} \text{ astfel încât } \mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{e}.$$

Atunci graduarea lui $\mathscr{A}$ forţează I_L-*fibra* lui x^u, i.e. mulţimea $\{x^v : x^v - x^u \in I_L\} = \{x^v : \deg_{\mathscr{A}}(x^v) = \deg_{\mathscr{A}}(x^u)\}$, să fie finită. Varianta graduată a Lemei lui Nakayama se aplică şi ne asigură că toate sistemele minimale de generatori ale lui I_L sunt baze Markov ale lui I_L, deoarece au toate acelaşi cardinal. Fie S o bază Markov a lui I_L şi coniderăm multiset-ul tuturor I_L-fibrelor corespunzătoare elementelor lui S. Acest multiset este un invariant al lui I_L şi nu depinde de alegerea lui S. Mai mult binoamele lui S sunt primitive, vezi [46, 32], şi astfel S este o submulţime a bazei Graver a lui I_L. Deoarece baza Graver a lui I_L este o mulţime finită, vezi [32], rezultă că baza Markov universală a lui I_L, (vezi [26]), i.e. reuniunea tuturor bazelor Markov, este finită.

Situaţia pentru un ideal laticial general este complet diferită. Să considerăm de exemplu laticea L generată de $\{(1,1),(5,0)\}$. Poate fi arătat că următoarele mulţimi sunt sisteme minimale de generatori ale lui I_L în $K[x,y]$: $\{1-xy, 1-x^5\}$, $\{1-xy, x^3-y^2\}$, $\{1-x^2y^2, 1-x^3y^3, 1-x^5\}$. Este clar că I_L nu este un ideal principal şi că $\mu(I_L) = 2$. Nu este greu să "producem" sisteme minimale de generatori ale lui I_L de orice cardinal mai mare sau egal cu 2. De exemplu fie $p_1, \ldots, p_s$ s numere prime distincte şi fie $a_i = p_1 \cdots p_s / p_i$. Elementele $a_1, \ldots, a_s$ sunt relativ prime şi cel mai mare divizor comun al polinoamelor $(1-z^{a_1}, \ldots, 1-z^{a_s})$ este $1-z$, în timp ce cel mai mare divizor comun al polinoamelor $\{1-z^{a_j} : j \neq i\}$ este $1-z^{p_i}$. Rezultă că $\langle 1-(xy)^{a_1}, \ldots, 1-(xy)^{a_s} \rangle = \langle 1-xy \rangle$ şi că mulţimea $\{1-x^5, 1-(xy)^{a_1}, \ldots, 1-(xy)^{a_n}\}$ este un sistem minimal de generatori al idealului I_L. Dacă ne uităm însă la bazele Markov ale lui I_L, observăm un comportament foarte interesant. Mulţimea $\{1-x^{2012}y^{2017}, y^4-x^{2013}y^{2022}\}$ este o bază Markov a lui I_L, dar este uşor de văzut ca elementele sale nu sunt binoame primitive. Nu este greu de produs în general o infinitate de baze Markov pentru idealul I_L: în Secţiunea 4 [8] se analizează în detaliu cum se obţin bazele Markov ale idealelor laticiale în general. În particular, rezultă pentru acest exemplu că baza Markov universală a lui I_L este infinită. În plus, nu există un unic multiset de I_L–fibre corespunzătoare bazelor Markov ale lui I_L. Într-adevăr monoamele lui $K[x,y]$ sunt partiţionate în exact 5 I_L–fibre infinite.

$$F_k = \{x^i y^j : i - j \equiv k \bmod 5\}, \quad 0 \leq k \leq 4.$$

Multiset-ul I_L–fibrelor pentru $\{1-xy, 1-x^5\}$ este $\{F_0, F_0\}$ în timp ce multiset-ul I_L–fibrelor pentru $\{1-xy, x^3-y^2\}$ este $\{F_0, F_3\}$.

Algoritmi pentru calculul unei mulţimi de generatori pentru idealele laticiale au fost date în [25, 3, 21]. Problema principală pe care o investigăm în această lucrare este cum să determinăm invarianţi ai bazelor Markov ale idealului laticial I_L şi cum să detectăm dacă o mulţime de binoame a lui I_L este o bază Markov a lui I_L. În loc să considerăm fibrele izolate ale lui I_L considerăm clase de echivalenţă de fibre şi arătăm că pentru toate bazele Markov ale lui I_L, multiset-ul claselor de echivalenţă este un invariant al lui I_L.

În ultimii ani, datorită aplicaţiilor bazelor Markov în algebra statistică, există un interes crescut pentru determinarea *binoamelor indispensabile* ale unui ideal laticial, vezi [35, 36, 6, 2, 37]. De un interes special beneficiază cazul în care toate elementele dintr-o bază Markov a unui ideal laticial sunt indispensabile, aşa cum este cazul idealelor generice laticiale, vezi [38]. Un binom indispensabil este un binom care apare în fiecare bază Markov a unui ideal laticial, până la o înmulţire cu scalari. Când laticea este pozitiv graduată problema determinării acestor binoame a fost rezolvată complet, vezi [6]. În această lucrare investigăm această problemă pentru ideale laticiale în general şi arătăm că dacă laticea L nu este pozitiv graduată, atunci există cel mult un binom indispensabil. Complexitatea Markov a liftărilor Lawrence generalizate este un alt subiect de mare interes în algebra statistică, vezi [41] pentru definiţie. Vrem să punctăm că Teoremele 4.1., 4.11 [8] sunt folosite în [9] pentru a da condiţii necesare şi suficiente pentru finitudinea complexităţii Markov a liftărilor Lawrence generalizate.

O altă întrebare la care răspundem este clasificarea idealelor laticiale care sunt "binomial complete intersection". Reamintim că un ideal laticial I_L deînălţime r este *complete intersection* dacă există polinoamele $P_1,\dots,P_r$ astfel încât $I_L = \langle P_1,\dots,P_r\rangle$, iar I_L este *binomial complete intersection* dacă există binoamele $B_1,\dots,B_r$ astfel încât $I_L = \langle B_1,\dots,B_r\rangle$. Daca lema lui Nakayama se aplică atunci idealele laticiale complete intersection sunt automat binomial complete intersection. Întrebarea are un răspuns complet în cazul în care L este pozitiv graduată de o serie de articole: [20, 11, 45, 28, 50, 34, 42, 39, 17, 43, 33]. Concluzia finală este că I_L este complete intersection dacă şi numai dacă matricea M ale cărei linii corespund unei baze a lui L este "mixed dominating": fiecare linie a lui M are o intrare pozitivă şi una negativă şi M nu conţine nicio submatrice pătrată cu această proprietate. Când L nu este pozitiv graduată situaţia este mai puţin clară. În această lucrare, în [9, Theorem 5.5] caracterizăm toate idealele laticiale binomial complete intersection. Împărţind pe secţiuni cele mai importante rezultate ale lucrării [9] structura este următoarea: în Secţiunea 2 introducem pentru o latice arbitrară $L\subset\mathbb{Z}^n$ sublaticea L_{pure}, ale cărei proprietăţi le studiăm în detaliu datorită importanţei cruciale a acestei latici; în Secţiunea 3 definim o relaţie de echivalenţă între I_L-fibre. Definim o relaţie de ordine parţială pe clasele de echivalenţă corespunzătoare şi arătăm în [8, Theorem 3.8] că orice lanţ descendent de astfel de clase stabilizează. În plus demonstrăm în [8, Corollary 4.14] că multiset-ul mulţimii *claselor de echivalenţă de fibre* corespunzătoare unei baze Markov a lui I_L este un invariant al lui I_L. În Secţiunea 4 dăm o caracterizare a tuturor sistemelor minimale de generatori ai laticelor pure, vezi [8, Theorem 4.1]. Apoi, descriem în [8, Theorem 4.11] toate bazele Markov posibile ale lui I_L pentru o latice arbitrară L. Ca o consecinţă a acestei teoreme putem calcula explicit $\mu(I_L)$ în [8, Theorem 4.13]. În plus, putem demonstra că dacă $\operatorname{rank} L_{pure}\geq 1$, atunci există cel mult un binom indispensabil. În final, ultimul rezultat important este [8, Theorem 5.5] din Secţiunea 5 în care clasificăm toate laticile L astfel încât I_L este binomial complete intersection.

2. Lucrarea "Markov bases and generalized Lawrence liftings" ([9]) a fost elaborată în colaborare de Hara Charalambous, Apostolos Thoma şi Marius Vlădoiu si a fost trimisă spre publicare la o prestigioasă revistă ISI. Fie A un element al lui $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$, pentru întregii pozitivi arbitrari m,n. Obiectul principal de studiu în acest articol este laticea $\mathscr{L}(A) := \operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}}(A)$. O *bază Markov* $\mathscr{M}$ a lui A este o submulţime finită a lui $\mathscr{L}(A)$ astfel încât pentru orice $\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathbb{N}^n$ şi $\mathbf{w}-\mathbf{u}\in\mathscr{L}(A)$ (i.e. $A\mathbf{w} = A\mathbf{u}$), există o submulţime $\{\mathbf{v}_i : i = 1,\dots,s\}$ a lui $\mathscr{M}$ care *conectează* $\mathbf{w}$ cu $\mathbf{u}$. Aceasta înseamnă că pentru $1\leq p\leq s$, $\mathbf{w}+\sum_{i=1}^{p}\mathbf{v}_i\in\mathbb{N}^n$ şi $\mathbf{w}+\sum_{i=1}^{s}\mathbf{v}_i = \mathbf{u}$. O bază Markov $\mathscr{M}$ a lui A defineşte o mulţime de generatori pentru idealul laticial

$$I_{\mathscr{L}(A)} := \langle x^{\mathbf{u}} - x^{\mathbf{v}} : A\mathbf{u} = A\mathbf{v}\rangle .$$

Fiecare $\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^n$ poate fi scris în mod unic ca $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ unde $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-\in\mathbb{N}^n$. În lucrarea fundamentală a lui Diaconis şi Sturmfels [12], a fost demonstrat că dacă $\mathscr{M}$ este o bază Markov a lui A dacă şi numai dacă mulţimea $\{x^{\mathbf{u}^+} - x^{\mathbf{u}^-} : \mathbf{u}\in\mathscr{M}\}$ este un sistem de generatori al lui $I_{\mathscr{L}(A)}$. O bază Markov $\mathscr{M}$ a lui A este *minimală* dacă nicio submulţime a lui $\mathscr{M}$ nu este o bază Markov a lui A. Spunem că laticea $\mathscr{L}(A)$ este *pozitivă* dacă $\mathscr{L}(A)\cap\mathbb{N}^n = \{\mathbf{0}\}$ şi *non pozitivă* dacă $\mathscr{L}(A)\cap\mathbb{N}^n\neq\{\mathbf{0}\}$. Când $\mathscr{L}(A)$ este pozitivă atunci versiunea graduată a Lemei lui Nakayama se aplică şi prin urmare toate bazele Markov minimale au acelaşi cardinal. Când $\mathscr{L}(A)$ este non pozitivă, atunci este posibil săvem baze Markov minimale ale lui A de cardinal diferit, vezi [8].

Este important de precizat că studiul laticelor non pozitive are implicaţii importante în studiul celor pozitive, vezi de exemplu demonstraţia din [41, Theorem 3], [22, Lemma 5] şi [26, Theorem 3.5]. *Baza Markov universală* a lui A va fi notată cu $\mathscr{M}(A)$ şi se defineşte ca reuniunea tuturor bazelor Markov minimale A de cardinal minimal, unde identificăm un vector $\mathbf{u}$ cu $-\mathbf{u}$, vezi [8, 41]. Sublaticea lui $\mathscr{L}(A)$ generată de toate elementele lui $\mathscr{L}(A)\cap\mathbb{N}^n$ se numeţe sublaticea *pură* a lui $\mathscr{L}(A)$ şi are un rol important în studiul bazelor Markov minimale ale lui A, vezi [8]. Sublaticea pură a lui $\mathscr{L}(A)$ este zero exact atunci când $\mathscr{L}(A)$ este pozitivă.

Dacă $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ scriem $\mathbf{u}=\mathbf{v}+_c\mathbf{w}$ pentru a nota faptul că suma respectivă ne dă o *descompunere conformă* pentru $\mathbf{u}$ i.e. $\mathbf{u}^+=\mathbf{v}^++\mathbf{w}^+$ şi $\mathbf{u}^-=\mathbf{v}^-+\mathbf{w}^-$. Submulţimea lui A constând din toate elementele lui $\mathscr{L}(A)$ care nu admit o descompunere conformă se notează cu $\mathscr{G}(A)$ şi se numeşte *baza Graver* a lui A. Când $\mathbf{u}\in\mathscr{G}(A)$ binomul $x^{\mathbf{u}^+}-x^{\mathbf{u}^-}$ se numeşte *primitiv*. Mulţimea $\mathscr{G}(A)$ este întodeauna finită, vezi [19, 46]. În această lucrarea autorii examinează când un element al unei baze Markov minimale aparţine lui $\mathscr{G}(A)$. Mai precis, se demonstrează în [9, Theorem 2.3] că $\mathscr{M}(A)\subset\mathscr{G}(A)$ are loc doar în două cazuri: când $\mathscr{L}(A)$ este pozitivă şi când $\mathscr{L}(A)$ este latice pură de rang 1. Este important de precizat că incluziunea pentru latici pozitive este un rezultat cunoscut, dar pentru completitudinea expunerii şi din cauză că nu am reuşit să găsim o demonstraţie în literatură am decis să includem şi o demonstraţie.

Notăm cu $\mathscr{U}(A)$ baza Gröbner universală a lui A, i.e. mulţimea care constă din totţi vectorii $\mathbf{u}\in\mathscr{L}(A)$ astfel încât $x^{\mathbf{u}^+}-x^{\mathbf{u}^-}$ face parte dintr-o bază Gröbner redusă a lui $I_{\mathscr{L}(A)}$ pentru o anumită ordine monomială pe $K[x_1,\ldots,x_n]$. Incluziunea $\mathscr{U}(A)\subset\mathscr{G}(A)$ are loc întotdeauna, vezi [46, Lemma 4.6]. În această lucrare investigăm şi relaţia dintre $\mathscr{M}(A)$ şi $\mathscr{U}(A)$. În general $\mathscr{M}(A)$ nu este o submulţime a lui $\mathscr{U}(A)$ chiar dacă laticea $\mathscr{L}(A)$ este pozitivă, după cum arată [9, Exemplul 2.8]. În [9, Teorema 2.7] dăm o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $\mathscr{M}(A)$ să fie conţinută în $\mathscr{U}(A)$ când laticea $\mathscr{L}(A)$ este pozitivă. În Secţiunea 3 a lucrării este studiată pentru $r\geq 2$, $B\in\mathscr{M}_{p\times n}(\mathbb{Z})$, *liftarea Lawrence generalizată* $\Lambda(A,B,r)$:

$$\Lambda(A,B,r)=\left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{A\quad 0\quad \cdots\quad 0}}^{r-\text{times}}} \\ A & 0 & & 0\\ 0 & A & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A\\ B & B & \cdots & B\end{array}\right).$$

Când $B=I_n$ obţinem clasica r–th *liftare Lawrence* $A^{(r)}$, vezi [41]. Aceste matrici au fost folosite pentru demonstrarea finitudinii bazei Graver a lui A şi au o importantă aplicaţie în studiul modelelor ierarhice din Algebraic Statistics, vezi [41, 26]. Notăm coloanele lui A cu $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$, iar coloanele lui B cu $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$. Matricea $(rm+p)\times rn$ $\Lambda(A,B,r)$ are drept coloane vectorii

$$\{\mathbf{a}_i\otimes\mathbf{e}_j\oplus\mathbf{b}_i:\ 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq r\},$$

unde $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ reprezintă baza canonică a lui $\mathbb{Z}^n$. Este important de observat că $\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$ este o sublatice a lui $\mathbb{Z}^{rn}$. Fie $C\in\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$. Putem asocia lui C o matrice $r\times n$ $\mathscr{C}$ astfel încât $\mathscr{C}_{i,j}=C_{(i-1)n+j}$. Fiecare linie a lui $\mathscr{C}$ corespunde unui element al lui $\mathscr{L}(A)$, iar suma liniilor lui $\mathscr{C}$ corespunde unui element din $\mathscr{L}(B)$. Numărul de linii nenule al lui $\mathscr{C}$ se numeşte *tipul* lui C. *Complexitatea* unei submulţimi a lui $\Lambda(A,B,r)$ este cel mai mare tip al unui vector din acea mulţime.

Complexitatea Graver a lui (A,B), notată cu $g(A,B)$ este supremumul complexităţilor elementelor lui $\mathscr{G}(\Lambda(A,B,r))$ atunci când r variază. Din [26, Theorem 3.5], $g(A,B)$ este egală cu 1-norma maximală a unui element din baza Graver a matricii $B\cdot\mathscr{G}r(A)$, unde $\mathscr{G}r(A)$ reprezintă matricea ale cărei coloane sunt vectorii bazei Graver a lui A şi care este întotdeauna finită. Mai mult, când $B = I_n$ sau $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{N})$, $m(A,B) \leq g(A,B)$, vezi [41] şi [26]. În ambele cazuri, este uşor de văzut că laticea $\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$ este pozitivă pentru $r \geq 2$. În general $\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$ este pozitivă pentru un anumit $r \geq 2$ dacă şi numai dacă $\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$ este pozitivă pentru orice $r \geq 2$, şi pentru a decide acest lucru este suficient să verificăm dacă laticea $\mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}(A) \cap \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}(B)$ este pozitivă, vezi [9, Lemma 3.2]. Principalul rezultat al Sectţiunii 3 a lucrării este [9, Theorem 3.3] care afirmă că atunci când $\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$ este pozitivă, toate bazele Markov minimale ale lui $\Lambda(A,B,r)$ au aceeaşi complexitate. Acest fapt este din punct de vedere computaţional esenţial, de vreme ce pentru calculul complexităţii unei baze Markov minimale a lui $\Lambda(A,B,r)$ se poate proceda astfel: se calculează o bază Gröbner redusă a lui $\Lambda(A,B,r)$ în raport cu orice ordine monomială pe $K[x_1,\ldots,x_n]$, se extrage apoi un sistem minimal de generatori din ea şi se citeşte cel mai mare tip al elementelor din sistem. Pe de altă parte, în cazul în care $\mathscr{L}(\Lambda(A,B,r))$ este non pozitivă se arată în Exemplul 3.7 [9] că orice este posibil atunci când se consideră complexităţile bazelor Markov minimale. În final, în [9, Remark 3.8], sunt discutate implicaţiile rezultatelor obţinute de autori asupra complexităţii Markov, şi implicit impactul lor în algebra statistică.

2. DISEMINAREA REZULTATELOR

În scopul diseminarii rezultatelor s-au tinut nouă prezentări de către echipa grantului in cadrul seminarului de algebră al Institutului de Matematica "Simion Stoilow". De asemenea s-au tinut şase prezentări in cadrul Scolii Nationale de Algebra "Algebraic Methods in Combinatorics", Bucureşti, 01–07 Septembrie 2013 de catre Marius Vlădoiu (3 prezentări), Dumitru Stamate (2 prezentări) şi Mihai Epure (1 prezentare), cei trei fiind şi printre organizatorii şcolii.

Marius Vlădoiu a participat la 4 stagii de cercetare in străinătate, unul în Germania si 3 în Grecia, care s-au materializat cu scrierea a 2 articole in colaborare cu profesori de la universitatile gazda (vezi [8, 9]), încă 2 fiind în curs de finalizare. În timpul acestor stagii de cercetare a ţinut o prezentare la Universitatea din Ioannina (Grecia) despre rezultatele obţinute în [24] şi 3 prezentări la Universitatea Duisburg–Essen, Campus Essen, despre rezultatele obţinute în [8, 9]. De asemenea, Marius Vlădoiu a participat la 3 conferinţe internaţionale:

- conferinţa "Syzygies in Berlin", Berlin, 27-31 mai 2013, Berlin, Germania;
- şcoala de vară "Algebraic Statistics" ţinută la Sophus Lie Conference Center, Nordfjordeid, Norvegia, în perioada 17–21 iunie 2013;
- conferinţa "EACA'S Second International School On Computer Algebra and Applications", Valladolid, 24–28 iunie 2013.

La ultima conferinţă mai sus menţionată Marius Vlădoiu a ţinut o prezentare cu titlul "Behaviour of the depth function for powers of monomial ideals", în timpul căreia a prezentat rezultatele obţinute în articolele [23, 24], scrise în cadrul acestui grant.

Bogdan Ichim a participat la un stagiu de cercetare în Spania, în cadrul căruia a ţinut o prezentare cu titlul "How to compute the multigraded Hilbert depth of a module" la Universitatea Valladolid, bazat pe articolul [27], pe data de 22–02–2012 şi o prezentare cu titlul "Introduction to Normaliz 2.9" în cadrul YMIS 2013 (Young Mathematicians in Segovia, Segovia, Spain, 25.02.2013–29.02.2013) pe data de 26–02–2013.

Mihai Epure a participat la 2 conferinţe internaţionale, organizate în România:

- conferinţa "Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry and Topology", Eforie–Nord, România, 21–24 iunie 2013.
- conferinţa comună "Joint International Meeting AMS-RMS", la secţiunea "Special Session on Commutative Algebra", Alba–Iulia, România, 27–30 iunie 2013.

Anul acesta d-l Epure Mihai şi-a scris teza de doctorat, pe care o va susţine la începutul anului 2014.

Tot la capitolul realizări dorim să adăugăm că în luna iunie a anului 2013 a fost lansată versiunea 2.9 a programului Normaliz împreună cu interfaţa grafică jNormaliz 1.3. Această versiune adaugă calculul integralelor discrete la Normaliz. Pentru detalii şi un scurt istoric vezi [5].

BIBLIOGRAFIE

[1] 4ti2 team, 4ti2 - a software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces, available at www.4ti2.de, 2007.

[2] S. Aoki, A. Takemura, R. Yoshida, *Indispensable monomials of toric ideals and Markov bases*, J. Symbolic Comput. **43** (2008), 490–507.

[3] A. Bigatti, R. LaScala, L. Robbiano, *Computing toric ideals*, J. Symbolic Computation **27** (1999), 351–365.

[4] E. Briales, A. Campillo, C. Marijuán, P. Pisón, *Minimal systems of generators for ideals of semigroups*, J. Pure Appl. Algebra **124** (1998), 7–30.

[5] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *Normaliz. Algorithms for rational cones and affine monoids.* Available at `http://www.math.uos.de/normaliz`.

[6] H. Charalambous, A. Katsabekis, A. Thoma, *Minimal systems of binomial generators and the indispensable complex of a toric ideal*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 3443–3451.

[7] H. Charalambous, A. Thoma, *On simple A-multigraded minimal resolutions*, Combinatorial aspects of commutative algebra. Exploratory workshop on combinatorial commutative algebra and computer algebra, Mangalia, Romania, May 29–31, 2008, Providence, RI , Amer. Math. Soc., Contemp. Math. 502 (2009), 33–44.

[8] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *Markov Bases of Lattice Ideals,* 22 pages, arXiv:1303.2303v1.

[9] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *Markov bases and generalized Lawrence liftings,* 10 pages, arXiv:0697072v1.

[10] CoCoATeam, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra, available at http://cocoa.dima.unige.it

[11] Ch. Delorme, *Sous monoides d'intersection complete de N*, Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) **9** (1976), 145–154.

[12] P. Diaconis, B. Sturmfels, *Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions*, Ann.Statist., **26** (1998), 363–397.

[13] A. Dickenstein, L.F. Matusevich, E. Miller, *Combinatorics of binomial primary decomposition*, Math. Z. **264** (2010), 745–763.

[14] M. Drton, B. Sturmfels, S. Sullivant, *Lectures on algebraic statistics*, Oberwolfach Seminars, 39. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. viii+171 pp.

[15] D. Eisenbud, B. Sturmfels, *Binomial ideals*, Duke Math. J. **84** (1996), 1–45.

[16] M. Epure, A Schreier domain type condition in the ideal systems setting, în pregătire.

[17] K. Fischer, W. Morris, J. Shapiro, *Affine semigroup rings that are complete intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1995), 3137–3145.

[18] I. Gitler, E. Reyes, J. A. Vega, *Complete intersection toric ideals of oriented graphs and Chorded-Theta subgraphs*, J. Algebr. Comb. (to appear).

[19] J. E. Graver, On the foundations of linear and integer linear programming I, Math. Program. **9**, 207–226 (1975).

[20] J. Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings,* Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

[21] R. Hemmecke, P. Malkin, *Computing generating sets of lattice ideals and Markov bases of lattices*, J. Symbolic Computation **44** (2009), 1463–1476.

[22] R. Hemmecke, K. Nairn, On the Gröbner complexity of matrices, J. Pure Appl. Alg. **213**, 1558–1563 (2009).

[23] J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu, The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal, J. Alg. Combinatorics, 37(2), 289–312 (2013).

[24] J. Herzog, M. Vladoiu, *Squarefree monomial ideals with constant depth function,* J. Pure Appl. Algebra 217(9), 1764–1772, 2013.

[25] S. Hoşten, B. Sturmfels, *GRIN: an implementation of Gröbner bases for integer programming,* in Integer Programming and Combinatorial Optimization (Copenhagen), LNCS **920** Springer Verlag (1995), 267–276.

[26] S. Hoşten, S. Sullivant, *A finiteness theorem for Markov bases of hierarchical models*, J. Combin. Theory Ser. A **114** (2007), 311–321.

[27] B. Ichim, J. Moyano, *How to compute the multigraded Hilbert depth of a module,* to apear in Mathematische Nachrichten.

[28] M. N. Ishida, *Normal semigroup rings which are complete intersections*, in: Proc. Symposium on Commtative Algebra, Karuizawa, 1978.
[29] T. Kähle, E. Miller, *Decompositions of commutative monoid congruences and binomial ideals*, arXiv:1107.4699v3.
[30] H. López, R. Villarreal, *Complete intersections in binomial and lattice ideals*, arXiv:1205.0772v2.
[31] E. Miller, *Theory and Applications of lattice point methods for binomial ideals*, in Combinatorial Aspects of Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Proceedings of Abel Symposium held at Voss, Norway, 14 June 2009, Abel Symposia, vol. 6, Springer Berlin Heidelberg, (2011), pp. 99–154.
[32] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Grad. Texts in Math., vol. 227, Springer-Verlag, New York, (2005).
[33] M. Morales, A. Thoma, *Complete intersection lattice ideals*, J. Algebra **284** (2005), 755–770.
[34] H. Nakajima, *Affine torus embeddings which are complete intersections,* Tôhoku Math. J. **38** (1986), 85–98.
[35] H. Ohsugi, T. Hibi, *Indispensable binomials of finite graphs*, J. Algebra Appl. **4** (2005), 421–434.
[36] H. Ohsugi, T. Hibi, *Toric ideals arising from contingency tables*, Proceedings of the Ramanujan Mathematical Society's Lecture Notes Series, (2006), 87–111.
[37] I. Ojeda, A. Vigneron-Tenorio *Indispensable binomials in semigroup ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 4205–4216.
[38] I. Peeva, B. Sturmfels, *Generic lattice ideals*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 363–373.
[39] J. C. Rosales, P. A. Garcia-Sanchez, *On complete intersection affine semigroups,* Commun. Algebra **23** (1995), 5395–5412.
[40] M. Roşca, M. Vladoiu, *Weighted vertex cover algebras,* în pregătire.
[41] F. Santos, B. Sturmfels, Higher Lawrence configurations, J. Combin. Theory Ser. A **103**, 151–164 (2003).
[42] U. Schäfer, *Der kanonische modul monomialer raumkurven,* Diplomarbeit, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, Halle, (1985).
[43] G. Scheja, O. Scheja, U. Storch, *On regular sequences of binomials*, Manuscripta Math. **98** (1999), 115–132.
[44] D. Stamate, *Asymptotic properties in the shifted family of a numerical semigroup with few generators,* în pregătire.
[45] R. P. Stanley, *Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections*, J. Algebra **49** (1977), 134–148.
[46] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, No. 8 American Mathematical Society Providence, R.I. (1995).
[47] B. Sturmfels, R. Weismantel, G. Ziegler, *Gröbner Bases of Lattices, Corner Polyhedra, and Integer Programming*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry, **36** (1995), 281–298.
[48] R. Thomas, R. Weismantel, *Test sets and inequalities for integer programs*, Proc. 5th International IPCO Conference, LNCS **1084** (1996), 16–30.
[49] R. Villarreal, Rees algebras of edge ideals, Comm. Algebra **23**, 3513–3524 (1995).
[50] K. Watanabe, *Invariant subrings which are complete intersections*, I (Invariant subrings of finite abelian groups), Nagoya Math. **77** (1980), 89–98.