SINTEZA LUCRARII TE_46, NR. 83/2010 FAZA FINALA 2010

MARIUS VLADOIU

1. INTRODUCERE

Un subiect de mare interes in cercetarea matematica actuala la nivel international il constituie doua conjecturi formulate de Richard Stanley. In prima conjectura Stanley se refera la asa numitele descompuneri Stanley ale modulelor multigraduate finit generate peste inele de polinoame in n variabile standard graduate, iar in a doua se refera la complexe simpliciale partitionabile. Prima conjectura a fost lansata de Stanley in 1982 intr-un articol aparut in Inventiones Mathematicae, vezi [23], si timp de 23 de ani a fost validata doar in citeva cazuri izolate. Aceasta conjectura afirma ca orice modul multigraduat finit generat peste inelul de polinoame intr-o multime finita de variabile, standard graduat, admite o descompunere Stanley al carei Stanley depth (sdepth) este marginit inferior de depth-ul modulului. Recent a fost demonstrat in [12] ca prima conjectura mentionata implica de fapt a doua conjectura. Primul articol (a carui descriere stiintifica o vom face in cele ce urmeaza) studiaza aceasta conjectura a lui Stanley, care reprezinta tematica principala a acestui grant. Inainte de a incepe descrierea propriu-zisa a acestei lucrari vom prezenta aceasta conjectura cu definitiile necesare intelegerii enuntului conjecturii precum si a rezultatelor ce urmeaza sa fie descrise.

Fie $S=K[x_1,\dots,x_n]$ un inel de polinoame in n variabile peste un corp K si M un S-modul finit generat multigraduat (adica $\mathbb{Z}^n$-graduat). Fie u un element omogen din M si Z o submultime (posibil vida) a multimii de variabile $\{x_1,\dots,x_n\}$. Vom nota cu $uK[Z]$ K-subspatiul vectorial al lui M generat de toate elementele de forma uv, cu v un monom din $K[Z]$. Un astfel de spatiu vectorial de forma $uK[Z]$ il vom numi spatiu Stanley de dimensiune $|Z|$, daca $uK[Z]$ este un $K[Z]$-modul liber. O descompunere Stanley a lui M este o prezentare a K-spatiului vectorial M ca o suma directa finita de spatii Stanley in categoria K-spatiilor vectoriale multigraduate. Cu alte cuvinte, fiecare din sumanzii directi ai lui M este un K-subspatiu vectorial multigraduat al lui M si descompunerea este compatibila cu multigraduarea.

Definitie Numarul $\operatorname{sdepth}\mathscr{D}=\min\{|Zi|:i=1,\dots,m\}$, unde m este numarul spatiilor Stanley din descompunerea $\mathscr{D}$ a lui M, se numeste *Stanley depth-ul* lui $\mathscr{D}$. *Stanley depth-ul* lui M se defineste ca fiind

$$\operatorname{sdepth}M:=\max\{\operatorname{sdepth}\mathscr{D}:\mathscr{D}\text{ este o descompunere Stanley a lui }M\}.$$

Prima conjectura a lui Stanley mai sus mentionata poate fi scrisa acum in forma:

Conjectura Fie M un S-modul multigraduat. Atunci:

$$\operatorname{sdepth} M \geq \operatorname{depth} M.$$

Conjectura ramane deschisa in general, dificultatea venind din faptul ca trebuie comparati 2 invarianti: unul combinatorial cu unul omologic. Cu toate acestea in situatia speciala a modulelor de forma I/J, unde I si J sunt ideale monomiale au fost facute progrese remarcabile in ultimii 5 ani. De exemplu s-a aratat in [14] ca daca aceasta conjectura este valabila pentru toate idealele monomiale I astfel incat S/I este Cohen-Macaulay atunci este valabila in general pentru S/I pentru orice ideal monomial. De asemenea, s-a gasit in [15] un algoritm de calcul pentru $\operatorname{sdepth} I/J$, care a permis ulterior validarea conjecturii intr-o serie de cazuri. In cazul idealelor monomiale libere de patrate Dorin Popescu a demonstrat in lucrarea [18] ca aceasta conjectura a lui Stanley este adevarata daca $n \leq 5$.

De ce este important cazul idealelor monomiale libere de patrate? Pentru ca prin polarizare orice ideal monomial poate fi transformat intr-un ideal monomial liber de patrate. Prin acest functor polarizare, depth-ul unui ideal monomial creste cu unu la fiecare pas al polarizarii. Cu toate ca inca nu a fost demonstrat, rezultatele de pana acum conduc la convingerea ca si sdepth-ul unui ideal monomial se comporta in acelasi mod ca si depth-ul. Aceasta ar insemna ca demonstrarea conjecturii lui Stanley pentru ideale monomiale libere de patrate ar implica demonstrarea conjecturii lui Stanley in cazul general al idealelor monomiale.

2. Rezultate stiintifice principale

Lucrarea pe care o vom prezenta este "Stanley depth and size of a monomial ideal", scrisa in colaborare de Jurgen Herzog, Dorin Popescu si Marius Vladoiu, vezi [13], care a fost trimisa spre publicare la Proceedings of American Mathematical Society. Rezultatul de la care a fost initiata aceasta lucrare este o inegalitate a lui Lyubeznik aparuta in Journal of Algebra in 1988, care spune ca

$$\operatorname{depth} I \leq 1 + \operatorname{size} I,$$

unde size-ul unui ideal este un invariant combinatorial care se defineste in functie de idealele prime asociate idealului I. Aceste prime asociate se pot determina dintr-o descompunere primara a idealului I. Mai precis, conform lui Lyubeznik, in cazul in care I este un ideal monomial liber de patrate intr-un inel de polinoame in n variabile, avand idealele prime minimale $\{P_1, \dots, P_s\}$, $\operatorname{size}(I)$ reprezinta numarul $v + (n-h) - 1$, unde h reprezinta inaltimea idealului care se obtine prin suma tuturor idealelor prime minimale, iar v este cel mai mic numar natural t pentru care exista intregii $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$ astfel incat suma tuturor idealelor prime minimale sa fie egala cu suma idealelor din multimea $\{P_{i_1}, .., P_{i_t}\}$. In lucrarea [13] autorii prezinta aceasta definitie in cadrul mai general al oricarui ideal monomial, inlocuind corespunzator in definitie, multimea primelor minimale cu cea a primelor asociate. In cazul in care conjectura lui Stanley ar fi adevarata atunci, tinand cont de inegalitatea lui Lyubeznik ar trebui sa avem si $\operatorname{sdepth} I \geq 1 + \operatorname{size} I$.

Intr-adevar, autorii demonstreaza in sectiunea 3 a articolului [13] aceasta inegalitate in baza unor tehnici dezvoltate in sectiunile 1 si 2 ale aceluiasi articol. Mai exact aceasta inegalitate reprezinta de fapt Teorema 3.1. a acestui articol si reprezinta rezultatul principal al lucrarii. Pentru demonstrarea acestei inegalitati autorii au trebuit sa introduca tehnici noi de algebra omologica si combinatoriala. In Sectiunea 1, este introdus un cocomplex $\mathbb{G}$ care este asociat unei multimi $\{J_1,\dots,J_s\}$ de ideale monomiale din inelul S/I, unde S reprezinta ca de obicei inelul de polinoame in n variabile peste un corp K, iar I reprezinta un ideal monomial din S. Se demonstreaza in Teorema 1.1 ca acest complex de module introdus este aciclic, iar in cazul particular in care $I=0$ si idealele $J_1,\dots,J_s$ sunt ideale monomiale ireductibile, $\mathbb{G}$ poate fi vazut ca dualul Alexander al complexului Taylor. Cu toate acestea principala aplicatie a acestui complex este calculul, respectiv estimarea in anumite situatii a depth-ului intersectiei tuturor idealelor $J_1,\dots,J_s$. In termeni legati de acest complex introdus autorii dau in Teorema 1.2. un criteriu pentru un ideal monomial de a avea depth-ul minimal, adica $\operatorname{depth} I = 1+\operatorname{size} I$. In particular se arata ca depth-ul minimal se atinge atunci $\operatorname{depth} I = 1+\operatorname{bigsize} I$, unde $\operatorname{bigsize} I$ reprezinta invariantul introdus de Dorin Popescu in [19]. Mai precis, daca in definitia data mai sus lui $\operatorname{size} I$ inlocuim “exista intregii $j_1<\cdots<j_t$” cu “pentru orice $j_1<\cdots<j_t$”, obtinem definitia lui $\operatorname{bigsize} I$. Este aratat de autori in Exemplul 1.3 ca, conditiile a) si b) din enuntul Teoremei 1.2 sunt independente si necesare pentru a avea depth-ul minimal.

De asemenea, pe baza aceluiasi complex, sunt date margini superioare pentru regularitatea unui ideal monomial liber de patrate I, in functie de $\operatorname{cosize} I$, un invariant introdus de autori, cu ajutorul dualitatii Alexander. Mai exact acest invariant se defineste astfel: fie I un ideal monomial minimal generat de monoamele $u_1,\dots,u_m$. Fie w cel mai mic numar t cu proprietatea ca exista intregii $1\le i_1<i_2<\cdots<i_t\le m$ astfel incat

$$\operatorname{lcm}(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_t})=\operatorname{lcm}(u_1,u_2,\dots,u_m).$$

Atunci numim numarul $\deg\operatorname{lcm}(u_1,u_2,\dots,u_m)-w$ *cosize-ul* lui I, si il notam $\operatorname{cosize} I$. Daca in aceeasi definitie inlocuim “exista intregii” cu “pentru orice intregi”, atunci obtinem definitia *big cosize-ului* lui I, notat $\operatorname{bigcosize} I$. Cu aceste definitii introduse de autori se arata in Corolarul 1.4. ca regularitatea unui ideal monomial liber de patrate I este marginita superior de $\operatorname{cosize} I+1$, egalitatea avand loc daca $\operatorname{cosize} I=\operatorname{bigcosize} I$.

Mai departe in sectiunea 2 a lucrarii autorii descriu metoda separarii variabilelor, a carui principala aplicatie este obtinerea de margini inferioare pentru sdepth-ul idealelor monomiale. Aceasta tehnica a fost introdusa de Adrian Popescu in [17] si ulterior extinsa la cazul idealelor monomiale libere de patrate de Dorin Popescu in [19, Teorema 1.5.]. In acest articol autorii extind aceasta metoda la cazul cel mai general posibil, si anume al idealelor monomiale oarecare (vezi Propozitia 2.1.). Pe baza acestei noi descompuneri a idealelor monomiale autorii reusesc sa demonstreze inegalitatea $\operatorname{sdepth} I\ge 1+\operatorname{size} I$, care reprezinta de fapt Teorema 3.1. a acestei lucrari. Demonstratia acestei teoreme este destul de complicata bazandu-se pe extinderea catorva rezultate din [17], [20], [21]. Ca un corolar al acestei teoreme, cu ajutorul dualitatii Alexander si folosind [22], autorii obtin de asemenea ca regularitatea Stanley a lui S/I este marginita superior de $\operatorname{cosize} I$, egalitatea avand loc in cazul in care $\operatorname{cosize} I=\operatorname{bigcosize} I$.

3. REZULTATE STIINTIFICE OBTINUTE IN PARALEL

1. In luna septembrie a anului 2010 a fost lansata versiunea 2.5 a programului Normaliz (vezi [9]) impreuna cu interfata grafica jNormaliz (vezi [1]). Facem aici un scurta prezentare a istoriei acestui program.

Prima versiune a programului Normaliz a fost un program C creat de Winfried Bruns si Robert Koch in 1997–1998 (vezi [10]) si extins in 2003 de Witold Jarnicki. Versiunea 2.0 (2007–2008) a fost complet rescrisa in C++ de Bogdan Ichim. Algoritmul Pottier pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare a fost adaugat in versiunea 2.1 (2009) de Bogdan Ichim. Gesa Kämpf, Bogdan Ichim, Andreas Paffenholz si Christof Söger au adaugat imbunatari la interfata programului in versiunea 2.2 (2009).

In varianta disponibila curent (versiunea 2.5 lansata in 2010) Bogdan Ichim si Christof Söger au adaugat capabilitati de procesare paralela si algoritmi imbunatatiti (vezi [7] pentru o parte din acesti noi algoritmi). Folosind varianta paralelizata a programului (versinea 2.5) am reusit in colaborare cu R. Hemmecke si M. Köppe, dezvoltatorii programului 4ti2 (vezi [11]), sa rezolvam exemple computationale extrem de dificile provenite din algebra statistica [6].

Mentionam faptul ca programul Normaliz are in prezent aproximativ 100 de citari in reviste de prestigiu la nivel mondial.

Avand in vedere necesitatea dezvoltarii algebrei computationale in tara noastra, in perioda octombrie – decembrie au fost redactate de asemenea 6 capitole dintr-un curs pe acesta tema de catre Bogdan Ichim.

2. In paralel cu obiectivele stiintifice principale ale acestui proiect am reusit sa finalizam si o alta lucrare "Irreducibility criteria via Jordan matrices", scrisa in colaborare de Mircea Becheanu si Marius Vladoiu, vezi [2] si trimisa spre publicare la Acta Arithmetica. Noutatea adusa de aceasta lucrare in acest domeniu de cercetare este abordarea unor probleme de ireductibilitate a polinoamelor cu ajutorul ordinilor monomiale. Mai precis, alternand ordinile monomiale lexicografice induse de diverse ordini ale variabilelor, autorii reusesc sa obtina un criteriu de ireductibilitate pentru polinoame in mai multe variabile cu coeficienti intr-un corp. Teorema principala a acestei lucrari este

Teorema 1.5 Fie $f(x_1,\ldots,x_n) \in K[x_1,\ldots,x_n]$ un polinom ireductibil si fie G matricea diagonala $n \times n$ formata din blocurile:

$$\begin{pmatrix} J(g_1) & & & \\ & J(g_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(g_t) \end{pmatrix}$$

unde $t \leq n$ este un numar natural nenul, $g_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_t(y_1,\ldots,y_m) \in K[y_1,\ldots,y_m]$ sunt polinoame (neconstante) relativ prime doua cate doua si $J(g_i)$ sunt matrici patratice de ordin $p_i \geq 1$, pentru orice $i \in \{1,\ldots,t\}$. Atunci, polinomul $f^G(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ este ireductibil in $K[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$.

Mentionam ca in lucrarile deja scrise pe aceasta tema de cercetare, precum [3],[4],[5], tehnicile de demonstrare sunt complet diferite de cele abordate de autori in aceasta lucrare.

4. Diseminarea rezultatelor

In scopul diseminarii rezultatelor s-au tinut zece prezentari de catre echipa grantului in cadrul seminariul de algebra al Institutului de Matematica ”Simion Stoilow”. De asemenea am avut sase prezentari in cadrul Scolii Nationale de Algebra ”Combinatorics in Commutative Algebra ”, Bucuresti, 20-25 Septembrie 2010 (dintre organizatori facand parte Bogdan Ichim si Marius Vladoiu).

De asemenea mentionam participare la ICMS 2010 (International Congress on Mathematical Software, September 2010, Kobe, Japan) a lui Bogdan Ichim in calitate de ”invited speaker”. Cu acesta ocazie a fost lansat si prezentat Normaliz 2.5 (vezi [8]).

Bibliografie

[1] V. Almendra and B. Ichim, *jNormaliz. A graphical interface for Normaliz.* Available at http://www.math.uos.de/normaliz.

[2] M. Becheanu, M. Vladoiu, *Irreducibility criteria via Jordan matrices*, submisa.

[3] A.I. Bonciocat, N.C. Bonciocat, *Some classes of irreducible polynomials*, Acta Arith., **123** (2006), no.4, pp. 349–360.

[4] A.I. Bonciocat, A. Zaharescu, *Irreducibility results for compositions of polynomials in several variables*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., Vol. **115** (2005), no.2, pp. 117–126.

[5] N.C. Bonciocat, A. Zaharescu, *Irreducible multivariate polynomials obtained from polynomials in fewer variables*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), pp. 2338–2343.

[6] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, and C. Söger, *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics*. Exp. Math., in press.

[7] W. Bruns and B. Ichim, *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones.* J. Algebra **324** (2010), 1098–1113.

[8] W. Bruns and B. Ichim, *Introduction to Normaliz 2.5*, LNCS **6327**, Fuduka K. (ed.) et al., Proceedings of ICMS 2010, pp. 209–212.

[9] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *Normaliz. Algorithms for rational cones and affine monoids.* Available at `http://www.math.uos.de/normaliz`.

[10] W. Bruns and R. Koch, *Computing the integral closure of an affine semigroup.* Univ. Iagel. Acta Math. **39** (2001), 59–70.

[11] R. Hemmecke, R. Hemmecke and P. Malkin, *4ti2. Version 1.3.2. Computation of Hilbert bases, Graver bases, toric Gröbner bases, and more.* Available from `http://www.4ti2.de`.

[12] J. Herzog, A. Soleyman-Jahan, S. Yassemi, *Stanley decompositions and partitionable simplicial complexes.* J. Algebr. Comb. **27**, 113–125 (2008).

[13] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu, *Stanley depth and size of a monomial ideal.* arXiv:1011.6462v1.

[14] J. Herzog, A. Soleyman-Jahan, X. Zheng, *Skeletons of Monomial Ideals.* Math. Nachrichten **283**, Issue 10, 1403–1408 (2010).

[15] J. Herzog, M. Vladoiu, X. Zheng, *How to compute the Stanley depth of a monomial ideal.* J. Algebra **322**, 3151–3169 (2009).

[16] G. Lyubeznik, *On the Arithmetical Rank of Monomial ideals.* J. Algebra **112**, 86–89 (1988).

[17] A. Popescu,*Special Stanley Decompositions.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **53**(101), 361–372 (2010).

[18] D. Popescu,*An inequality between depth and Stanley depth.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **52**(100), 377–382 (2009).

[19] D. Popescu,*Stanley conjecture on intersections of four monomial prime ideals.* arXiv.AC/1009.5646.

[20] A. Rauf,*Depth and Stanley Depth of Multigraded Modules.* Comm. in Algebra. **38**, 773–784 (2010).

[21] Y. Shen,*Stanley depth of complete intersection monomial ideals and upper-discrete partitions.* J. Algebra **321**, 1285–1292 (2009).

[22] A. Soleyman–Jahan,*Prime filtration and Stanley decompositions of squarefree modules and Alexander duality.* Manuscripta Math. **130**, 533–550 (2009).

[23] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology.* Invent. Math. **68**, (1982), 175–193.