Rezolvarea temei 1

Exerciţiul 1 *a) Rezultă din identităţile binecunoscute satisfăcute de funcţiile trigonometrice şi hiperbolice*

$$cos^2 + sin^2 = 1, \quad ch^2 - sh^2 = 1. \tag{1}$$

c_1 este injectivă, dar nu este surjectivă (nu ia valoarea $(a, 0)$). De asemenea c_2 este injectivă, dar nu surjectivă (ramura hiperbolei cu $x < 0$ nu este în imagine).

b) O parametrizare a parabolei este $c_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_3(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$. Această aplicaţie este bijectivă.

c) Nu există o aplicaţie netedă şi bijectivă $c : I \to \mathcal{E}$, cu I un interval deschis, deoarece elipsa este compactă şi I nu este. Acelaşi lucru este imposibil pentru hiperbolă care nu este conexă (are două arce caracterizate de $x < 0$, respectiv $x > 0$).

d) $c_1'(t) = (-a \cdot sin(t), b \cdot cos(t))$, $c_2'(t) = (a \cdot sh(t), b \cdot ch(t))$, $c_3'(t) = (\frac{t}{p}, 1)$.

Exerciţiul 2 *a) Pentru cicloidă presupunem că dreapta pe care se rostogoleşte cercul este axa Ox, iar cercul iniţial are raza r şi este tangent la direcţia Ox în origine. Să urmărim punctul P aflat iniţial în $(0, 0)$. Presupunem că cercul s-a rotit cu unghiul θ. Atunci P va avea componentele (x, y). Avem acum situaţia din Figura 2. Atunci avem $RO' = r \cdot cos(\theta)$, şi $PR = r \cdot sin(\theta)$. Lungimea arcului PQ este egală cu lungimea segmentului OQ. $r\theta = PQ = OQ = x + PR = x + r \cdot sin(\theta)$, deci $x = r - r \cdot sin(\theta)$. $r = O'Q = y + RO' = y + r \cdot cos(\theta)$. Prin urmare $y = r(1 - cos(\theta))$.*

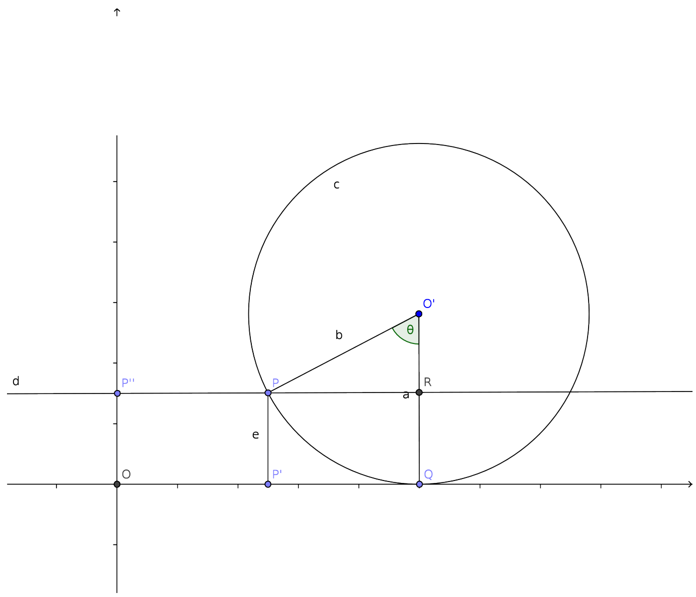

Fig. 1

În concluzie

$$x = r(\theta - sin(\theta))$$
$$y = r(1 - cos(\theta))$$

Analog obţinem parametrizările

$$x = (R - r)cos(\theta) + r \cdot cos\left(\frac{R - r}{r}\theta\right),$$
$$y = (R - r)sin(\theta) - r \cdot sin\left(\frac{R - r}{r}\theta\right)$$

pentru hipocicloidă şi

$$x = (R + r)cos(\theta) - r \cdot cos\left(\frac{R + r}{r}\theta\right),$$
$$y = (R + r)sin(\theta) - r \cdot sin\left(\frac{R + r}{r}\theta\right)$$

pentru epcicloidă.

c) *Dacă o epicicloidă are $R = r$, atunci se vede cu uşurinţă că are un singur punct singular (este cardioidă), iar dacă $R = 2r$ are două singularităţi (este nefroidă).*

d) *La fel pentru deltoidă şi astroidă (3, respectiv 4 singularităţi).*

e) *Folosind formulele pentru funcţii trigonometrice se poate arăta că astroida admite parametrizarea*

$$x = a \cdot cos^3(\theta)$$
$$y = a \cdot sin^3(\theta).$$

Se vede astfel că este curbă Lamé cu exponent $q = \frac{2}{3}$.

Exerciţiul 3 a) *Evident, oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}$, $a^2 cos^2(t) + a^2 sin^2(t) = a^2$. *Deci imaginea lui* c *se află pe cilindrul de ecuaţie* $x^2 + y^2 = a^2$.

b)] *Vectorul tangent în* t *este* $c'(t) = (-a \cdot sin(t), a \cdot cos(t), b)$, *iar axa cilindrului are vectorul director* $v = (0, 0, 1)$. *Atunci cosinusul unghiului dintre vectorul tangent şi* e_3 *este*

$$\frac{\langle(-a \cdot sin(t), a \cdot cos(t), b), (0, 0, 1)\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot 1} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

deci constant.