Raport in extenso

Algebre Hopf, omologie ciclica si categorii monoidale

Proiect Idei (Cod 69), contract nr. 560/2009
Director: prof. dr. Dragos STEFAN (Universitatea Bucuresti)

Rezultatele obtinute in vederea indeplinirii obiectivelor pentru anul 2010 se gasesc in cele 9 articole elaborate. Dintre acestea, doua sunt deja publicate in reviste cotate ISI, doua sunt acceptate spre publicare in reviste cotate ISI iar celelalte sunt trimise spre publicare la reviste cotate ISI, dupa cum urmeaza:

Articole elaborate

1. Gabriella Bohm, **Dragos Stefan**, *A categorical approach to cyclic duality*, acceptat pentru publicare in **Journal of Noncommutative Geometry**, arXiv:math.KT/0910.4622

2. Pascual Jara Martinez, Javier Lopez Pena, **Dragos Stefan**, *On the Koszulity of twisted tensor products of algebras* arXiv:math.KT/0910.4622

3. **Florin Panaite**, *More examples of invariance under twisting*, arXiv:math.QA/1011.3839

4. **Florin Panaite**, *Invariance under twisting for crossed products*, arXiv:math.QA/1008.0123

5. **Madalin Ciungu**, **Florin Panaite**, *L-R-smash products and L-R-twisted tensor products of algebras*, arXiv:math.QA/1007.2372

6. Helena Albuquerque, **Florin Panaite**, *Alternative twisted tensor products and Cayley algebras*, acceptat pentru publicare in **Communications in Algebra**, arXiv:math.RA/1011.1820

7. **Mihai D. Staic**, Vladimir Turaev, *Remarks on 2-dimensional HQFTs*, **Algebraic and Geometric Topology** 10(3), 1367–1393 (2010), arXiv:math.GT/0912.1380

8. **Mihai D. Staic**, *An explicit description of the simplicial group $K(A, n)$*, arXiv:math.AT/1011.4132

9. **Florin Panaite**, **Mihai D. Staic**, *A quotient of the braid group related to pseudosymmetric braided categories*, **Pacific Journal of Mathematics** 244(1), 155–167 (2010), arXiv:math.QA/0902.0512

Criteriul minim de performanta asteptat pentru anul 2010 era de doua articole acceptate spre publicare in reviste cotate ISI. Asadar, **consideram ca toate obiectivele au fost indeplinite integral din punct de vedere stiintific**.

Vom prezenta in continuare cele mai importante rezultate stiintifice obtinute:

Articolul 1.

Obiectele simpliciale intr-o categorie $\mathcal{C}$ pot fi definite ca functori contravarianti de la o anumita categorie Δ la $\mathcal{C}$. Lucrand cu functori covarianti se obtine notiunea duala, si anume de obiect cosimplicial. Obiectele ciclice in $\mathcal{C}$, care stau la baza constructiei omologiei ciclice, se definesc tot ca functori contravarianti de la o anumita categorie Λ, introdusa de A. Connes. Prin dualitate se definesc obiectele cociclice ca fiind functori covarianti de la Λ la $\mathcal{C}$. Extrem de interesant este faptul ca Λ se afla in dualitate cu ea insasi, in sensul ca Λ este izomorfa cu opusa ei Λ^{op}. Aceasta inseamna ca unui obiect ciclic ii corespunde un obiect cociclic, si invers. Aceasta corespondenta intre obiectele ciclice si cele cociclice poarta astazi numele de dualitate ciclica.

Exemple remarcabile de perechi aflate in dualitate ciclica provin din teoriile de (co)omologie Hopf-ciclica. Aceste teorii sunt specifice algebrelor Hopf, sau generalizarilor acestora (bialgebre, algebroizi Hopf etc.). In principiu, obiectele ciclice sau cociclice care stau la baza acestor teorii sunt construite dupa reteta urmatoare: se porneste cu o algebra Hopf H si se considera (co)actiuni ale lui H pe o (co)algebra A (patru posibilitati). In fiecare caz se arata ca exista o categorie convenabila de A-(co)module care sunt compatibile cu H, asfel incat prin aplicarea unui functor de tipul $Hom(A, -)$ sau $A \otimes (-)$ se obtin opt tipuri de obiecte cociclice. Prin dualitate (lucrand in categoria opusa) se pot obtine opt tipuri de obiecte ciclice. Este remarcabil ca fiecare obiect ciclic din prima categorie se afla in dualitate ciclica cu unul din cea de a doua categorie.

In articolul pe care il prezentam, s-a incercat sa se gaseasca o metoda generala de a construi obiecte ciclice si cocilice, astfel incat cele mentionate mai sus sa se regaseasca drept cazuri particulare. De asemenea s-a dorit ca aceasta constructie generala sa explice de ce cele opt tipuri de obiecte ciclice se corespund prin dualitate ciclica cu cele opt tipuri de obiecte cociclice. In prima parte a lucrarii, folosind ca instrument de lucru monadele si legile de distributivitate, a fost definita o categorie $\mathcal{A}$, impreuna cu un functor $\mathcal{Z}^*$ de la $\mathcal{A}$ la categoria obiectelor cociclice $\overline{\mathcal{P}}$. Cu alte cuvinte, obiectele lui $\mathcal{A}$ joaca rolul de coeficienti pentru coomologia ciclica. Datorita faptului ca aceste constructii sunt extrem de tehnice nu putem oferi detalii asupra lor aici. In cea de a doua sectiune se construiesc opt obiecte in categoria $\mathcal{A}$, care prin functorul $\mathcal{Z}^*$ sunt duse in obiectele cociclice asociate (co)actiunilor algebrelor Hopf pe (co)algebre. In cea de a treia sectiune s-a construit o noua categorie $\mathcal{B}$ impreuna cu un functor $\mathcal{Z}_*$ de la $\mathcal{B}$ la categoria obiectelor para-ciclice $\underline{\mathcal{P}}$. De data aceasta obiectele categoriei $\mathcal{B}$ trebuie privite drept coeficienti pentru omologia ciclica. Si in acest caz se recupereaza cele opt exemple cunoscute din omologia Hopf ciclica.

In partea centrala a articolului se studiaza legatura dintre categoriile construite anterior. In rezultatul principal al lucrarii se arata ca se poate construi un functor $\widetilde{(-)} : \mathcal{A}_c^\times \to \mathcal{B}^\times$ astfel incat diagrama de mai jos este comutativa. Aici $\mathcal{A}_c^\times$ si $\mathcal{B}^\times$ reprezinta doua subcategorii convenabil alese ale lui $\mathcal{A}$ si respectiv $\mathcal{B}$. Functorul $\widehat{(-)} : \overline{\mathcal{P}}^\times \to \underline{\mathcal{P}}^\times$ este functorul de dualitate ciclica construit de Connes.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_c^\times \arrow[r, "\widetilde{(-)}"] \arrow[d, "\mathcal{Z}^{*\times}"'] & \mathcal{B}^\times \arrow[d, "\mathcal{Z}_*^\times"] \\
\overline{\mathcal{P}}^\times \arrow[r, "\widehat{(-)}"'] & \underline{\mathcal{P}}^\times
\end{tikzcd}$$

In ceea ce priveste constructia functorului $\widetilde{(-)}$, aceasta aminteste intr-un anumit sens de constructia Sweedler prin care se ataseaza unei algebre A un A-coring. Din acest punct de vedere, in acest context abstract, dualitatea ciclica poate fi interpretata ca o dualitate de tip algebra-coalgebra.

Intr-un mod asemanator se poate construi un functor $\overline{(-)} : \mathcal{B}_e^\times \to \mathcal{A}^\times$ care face comutativa diagrama obtinuta din cea de mai sus prin inversarea sagetilor orizontale. In ultima parte a lucrarii se reiau cele 16 exemple de obiecte (co)ciclice si se stabileste care dintre acestea sunt in dualitate ciclica.

Articolul 2.

Fie A si B doua algebre (asociative si unitare), fie $R : B \otimes A \to A \otimes B$ o aplicatie lineara, cu notatie $R(b \otimes a) = a_R \otimes b_R$, pentru $a \in A$, $b \in B$, satisfacand conditiile $a_R \otimes 1_R = a \otimes 1$, $1_R \otimes b_R = 1 \otimes b$, $(aa')_R \otimes b_R = a_R a'_r \otimes b_{R_r}$, $a_R \otimes (bb')_R = a_{R_r} \otimes b_r b'_R$, pentru orice $a, a' \in A$ si $b, b' \in B$ (unde r este inca o copie a lui R). Daca definim pe $A \otimes B$ o noua multiplicare, prin $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa'_R \otimes b_R b'$, atunci aceasta multiplicare este asociativa iar $1_A \otimes 1_B$ este unitate. In acest caz, R se numeste **aplicatie de twistare** intre A si B iar noua structura de algebra pe $A \otimes B$ este notata cu $A \otimes_R B$ si este numita **produsul tensorial twistat** al lui A si B. Aceasta constructie a aparut in numeroase contexte si exista multiple aplicatii si exemple. Mentionam ca din punct de vedere geometric, produsul tensorial twistat este privit ca un inlocuitor natural (si mai potrivit decat produsul tensorial obisnuit) al produsului cartezian de "spatii" in geometria necomutativa. Dintre exemple, mentionam fie constructii clasice (produsul tensorial obisnuit sau graduat, extensii Ore) fie constructii mai recente, aparute in special in teoria algebrelor Hopf (produsul smash, dublul Drinfeld, produsul incrucisat diagonal) sau avand o natura mai geometrica (plane cuantice, toruri cuantice).

Dupa cum sugereaza numele sau, o algebra patratica A este un cat al unei algebre $K\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$, printr-un ideal generat de un numar finit de polinoame omogene de grad doi. Una dintre motivatiile initiale pentru studiul acestor algebre a fost faptul ca ele ofera un cadru convenabil pentru studiul actiunilor *grupurilor cuantice* pe *spatii necomutative.* In aceasta abordare a geometriei necomutative, datorata lui Manin, algebrele patratice joaca rolul algebrelor de functii pe spatiul necomutativ. In urma incercarilor de a aborda o serie de probleme provocatoare privind structura unei algebre patratice, cum ar fi calcularea seriei sale Hilbert si gasirea unor metode prin care sa se testeze existenta bazelor Poincare-Birkhoff-Witt, in interiorul clasei algebrelor patratice s-a detasat subclasa algebrelor Koszul. Intr-un anumit sens acestea reprezinta prototipul ideal de algebre patratice, avand proprietati absolut remarcabile. Este uimitor ca numeroase exemple de algebre patratice, care au aparut natural in diverse domenii ale matematicii (geometria algebrica: anumite algebre de coordonate omogene; topologia algebrica: algebrele Steenrod; teoria numerelor: inelul de K-teorie Milnor al unui corp etc.) sunt algebre Koszul.

Se cunosc numeroase caracterizari echivalente ale algebrelor Koszul: folosind complexul Koszul, construind unele rezolutii de tip special ale corpului de baza prin module proiective graduate, sau studiind versiunea graduata a grupurilor $\mathrm{Tor}^*_A(K,K)$ sau $\mathrm{Ext}^A_*(K,K)$. In incheierea acestei scurte prezentari a cadrului in care se plaseaza problematica pe care am abordat-o, vom aminti o alta caracteristica fundamentala a algebrelor Koszul: orice astfel de algebra are un dual, care este tot algebra Koszul.

Unul dintre obiectivele proiectului nostru este de a studia proprietatile omologice ale unui produs tensorial twistat. Problema concreta pe care doream sa o studiem era daca produsul tensorial twistat $A\otimes_\sigma B$ a doua algebre Koszul este de asemenea Koszul. Deoarece metodele uzuale prin care se verifica daca o algebra este Koszul nu pareau cele mai potrivite pentru problema noastra, am cautat noi caracterizari ale acestui tip de algebre. Punctul de plecare l-a constituit observatia ca pe complexul Koszul exista o structura de coalgebra, cu ajutorul careia se pot redefini diferentialele acestuia. S-a vazut usor ca aceasta constructie se poate realiza pentru orice pereche (A,C) formata dintr-o algebra graduata A si o coalgebra graduata C, ambele conexe, si care satisfac o anumita conditie de compatibilitate in grad doi. Numim o astfel de pereche pre-Koszul.

Am aratat apoi ca pentru orice algebra graduata A, care este conexa si generata de elementele de grad unu, exista o coalgebra graduata C astfel incat (A,C) este pre-Koszul. De fapt, se poate folosi $T(A) := \mathrm{Tor}^*_A(K,K)$, pe care se ia structura de coalgebra provenind din faptul ca rezolutia bar normalizata este o coalgebra diferentiala graduata. Dual, pentru orice coalgebra graduata conexa si cogenerata in grad unu, $(C,\mathrm{Ext}^C_*(K,K))$ este o pereche pre-Koszul. Cu aceste exemple la indemana, am continuat studiul proprietatilor perechilor pre-Koszul. Unei astfel de perechi i-am asociat sase complexe (de A-module stangi si drepte, de A-bimodule, de C-comodule stangi si drepte, si de C-bicomodule). Ele joaca cumva rolul complexului Koszul, si proprietatea lor fundamentala este ca unul este exact daca si numai daca toate celelalte sunt exacte. Exactitatea lor inseamna ca pot fi utilizate drept rezolutii in categoriile corespunzatoare. Spre exemplu, complexul de A-module stangi este o rezolutie proiectiva a lui K in categoria de A-module stangi graduate, iar complexul de C-bicomodule este o rezolutie injectiva a lui C in categoria C-bicomodulelor gradute etc. Pentru simplitate, vom spune ca (A,C) este Koszul daca unul dintre aceste complexe este exact. Alegerea noastra favorita este $\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A,C)$, complexul de A-module stangi.

In continuare am investigat proprietatile perechilor Koszul. Data o astfel de pereche (A,C), am aratat mai intai ca A este generata ca algebra de elementele omogene de grad unu, iar C este cogenerata in grad unu. In particular putem vorbi de perechile Koszul $(A,T(A))$ si $(C,\mathrm{Ext}^C_*(K,K))$. Dupa cum era de asteptat, acestea sunt Koszul. Demonstratia acestui rezultat se bazeaza pe faptul ca rezolutia $\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A,C)$ si rezolutia bar normalizata a lui K (privit ca A-modul stang) pot fi comparate prin intermediul unui morfism canonic de A-module. Prin trecere la omologie se obtine un izomorfism de coalgebre graduate $C \cong T(A)$, cu ajutorul caruia se identifica complexul de A-module stangi asociat perechii $(A,T(A))$ cu $\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A,C)$, despre care stim ca este exact. Deci, a fortiori, $\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A,T(A))$ este exact.

Daca $(A,T(A))$ este Koszul am aratat ca algebra A este algebra Koszul, si reciproc: pentru orice algebra Koszul A exista o pereche Koszul (A,C). Deci ciclul de implicatii se inchide, concluzionand ca A este o algebra Koszul daca si numai daca perechea $(A,T(A))$ este Koszul. Evident, cu definitia potrivita pentru coalgebrele Koszul, am demonstrat ca o caracterizare asemanatoare functioneaza si pentru coalgebre. Punand impreuna toate rezultatele precedente, s-a dedus ca A este Koszul daca si numai daca $T(A)$ este o coalgebra Koszul. Analog C este o coalgebra Koszul daca si numai daca $E(C) = \mathrm{Ext}^C_*(K,K)$ este o algebra Koszul. In abordarea noastra, coalgebra $T(A)$ trebuie privita ca fiind dualul Koszul al algebrei A, si simetric, algebra $E(C)$ joaca rolul de dual al coalgebrei C. Ce se poate spune despre dualul dualului, adica $E(T(A))$ si $T(E(C))$? Dupa cum este de asteptat, coincid cu obiectele initiale A si respectiv C. Explicatia consta in faptul ca, daca A este Koszul, atunci $(A,T(A))$ si $(E(T(A)),T(A))$ sunt perechi Koszul, iar daca (A',C) si (A'',C) sunt perechi Koszul atunci $A' \cong A''$. In definitia clasica a dualului unei algebre Koszul A, se presupunea ca algebra are componentele omogene finit dimensionale, iar dualul este o algebra, nu o coalgebra. Si in acest caz dualul dualului coincide cu algebra initiala, dar in contextul in care noi ne-am plasat nu avem nevoie de nicio conditie de finitudine.

Beneficiind de aceste noi instrumente, putem reveni la problema noastra initiala, si anume de a vedea daca produsul tensorial twistat a doua algebre Koszul este Koszul. Fie A si B doua algebre Koszul. Presupunem ca se da o aplicatie de twistare $\sigma : B\otimes A \to A\otimes B$. Stim deja ca perechile Koszul $(A,T(A))$

si $(B, T(B))$ sunt Koszul. Pentru a demonstra ca $A \otimes_\sigma B$ este Koszul este suficient sa construim o pereche Koszul care are pe prima pozitie produsul tensorial twistat. Un candidat pentru coalgebra cautata este evident un produs tensorial twistat de *coalgebre*, si anume $T(A) \otimes_\tau T(B)$, unde aplicatia de twistare $\tau : T(A) \otimes T(B) \to T(B) \otimes T(A)$ trebuie gasita. Am aratat ca o astfel de aplicatie τ exista intr-adevar, si ca ea este compatibila intr-un anumit sens cu σ. Mai mult, am aratat ca se poate construi o aplicatie $\lambda : T(A) \otimes B \to B \otimes T(A)$ cu anumite proprietati, care ne permit sa identificam complexele noastre favorite

$$\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A \otimes_\sigma B, T(A) \otimes_\tau T(B)) \cong \widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A, T(A)) \otimes \widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A, T(B)).$$

Cum A si B sunt Koszul, complexele $\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A, T(A))$ si $\widetilde{\mathrm{K}}^l_*(A, T(B))$ sunt exacte. Din formula Kunneth rezulta ca produsul tensorial al celor doua complexe este exact, deci si cel care ne intereseaza are aceasta proprietate.

De fapt, cele mentionate mai sus pot fi usor extinse astfel. Se porneste cu doua perechi pre-Koszul (A, C) si (B, D), impreuna cu aplicatii de twistare $\sigma : B \otimes A \to A \otimes B$ si $\tau : C \otimes D \to D \otimes C$, si o aplicatie $\lambda : C \otimes B \to B \otimes C$. Aceste date satisfac o serie de conditii de compatibilitate pe componentele omogene de grad 1. In aceasta situatie, am aratat ca $(A \otimes_\sigma B, C \otimes_\tau D)$ este pre-Koszul. Aceasta pereche este Koszul daca (A, C) si (B, D) sunt astfel de perechi. Am folosit acest rezultat pentru a demonstra ca o forma generalizata a extinderilor Ore sunt Koszul. In acest caz, perechea (B, D) se ia astfel incat B este algebra tensoriala a unui spatiu vectorial V iar $D = K \oplus V$, unde in D elementele lui V sunt primitive.

Articolul 3.

In lucrarea [5] s-a demonstrat un rezultat foarte general, numit "invarianta la twistari" pentru produse tensoriale twistate de algebre, avand drept inspiratie invarianta la twistari a produsului smash din teoria algebrelor Hopf, dar care contine drept cazuri particulare alte cateva rezultate independente de algebre Hopf, de exemplu teorema lui Majid potrivit careia dublul Drinfeld al unei algebre Hopf quasitriangulare este izomorf cu un produs smash si doua rezultate recente ale lui Fiore si Fiore–Steinacker–Wess. Acest rezultat afirma ca daca $A \otimes_R B$ este un produs tensorial twistat de algebre si pe spatiul vectorial A avem inca o structura de algebra notata A' si avem de asemenea doua aplicatii lineare $\rho, \lambda : A \to A \otimes B$ satisfacand o lista de axiome, atunci se poate defini o noua aplicatie de twistare $R' : B \otimes A' \to A' \otimes B$ printr-o anumita formula si avem un izomorfism de algebre $A' \otimes_{R'} B \simeq A \otimes_R B$.

In acest articol sunt prezentate inca trei rezultate din literatura de specialitate care pot fi privite drept cazuri particulare de "invarianta la twistari":

(i) Fie H o algebra Hopf finit dimensionala si A o H-comodul algebra la dreapta, cu multiplicarea notata $a \otimes a' \mapsto aa'$ si structura de comodul $A \to A \otimes H$, $a \mapsto a_{<0>} \otimes a_{<1>}$. Fie $\nu : H \to End(A)$ o aplicatie lineara inversabila in convolutie, cu inversa in convolutie notata ν^{-1}. Pentru $h \in H$ si $a \in A$, notam $\nu(h)(a) = a \cdot h \in A$. Pentru $a, a' \in A$ notam $a * a' = (a \cdot a'_{<1>})a'_{<0>} \in A$. Presupunem ca, pentru orice $a, a' \in A$ si $h \in H$, urmatoarele conditii sunt satisfacute:

$$\begin{aligned}
&a \cdot 1_H = a, \quad 1_A \cdot h = \varepsilon(h)1_A, \\
&(a \cdot h_2)_{<0>} \otimes (a \cdot h_2)_{<1>}h_1 = a_{<0>} \cdot h_1 \otimes a_{<1>}h_2, \\
&(a * a') \cdot h = (a \cdot a'_{<1>}h_2)(a'_{<0>} \cdot h_1).
\end{aligned}$$

Atunci, conform [1], $(A, *, 1_A)$ este de asemenea o H-comodul algebra la dreapta (cu aceeasi structura de H-comodul ca si A), notata in cele ce urmeaza cu A_ν, si in plus exista un izomorfism de algebre $A_\nu \# H^* \simeq A \# H^*$ (in [1] s-a demonstrat de asemenea ca acest rezultat implica teorema de dualitate Blattner-Montgomery).

Acest rezultat poate fi privit ca un caz particular al teoremei de invarianta la twistari, astfel: se considera drept algebra A comodul algebra initiala A, se considera drept A' comodul algebra A_ν, se ia $B = H^*$, se considera $A \# H^*$ drept produsul tensorial twistat $A \otimes_R H^*$, unde $R : H^* \otimes A \to A \otimes H^*$, $R(\varphi \otimes a) = \varphi_1 \cdot a \otimes \varphi_2 = a_{<0>} \otimes \varphi \leftharpoonup a_{<1>}$, pentru $\varphi \in H^*$ si $a \in A$, unde $\leftharpoonup$ este actiunea regulata a lui H pe H^*. Se definesc apoi doua aplicatii $\rho, \lambda : A \to A \# H^*$, si se demonstreaza ca toate conditiile necesare aplicarii teoremei de invarianta la twistari sunt indeplinite, si atunci apare aplicatia de twistare $R' : H^* \otimes A_\nu \to A_\nu \otimes H^*$ despre care se demonstreaza ca de fapt $R' = R$, deci obtinem $A_\nu \otimes_{R'} H^* = A_\nu \# H^*$ si deci in final $A_\nu \# H^* \simeq A \# H^*$, q.e.d.

(ii) Fie H o algebra Hopf si A o H-comodul algebra la dreapta, cu structura de comodul notata $a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$. Notam de asemenea $a_{(0)} \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)} = a_{(0)_{(0)}} \otimes a_{(0)_{(1)}} \otimes a_{(1)} = a_{(0)} \otimes a_{(1)_1} \otimes a_{(1)_2}$. Omogenizarea externa a lui A, introdusa in [6] si notata cu $A[H]$, este o structura de H-comodul algebra la dreapta pe $A \otimes H$, cu multiplicare $(a \otimes h)(a' \otimes h') = aa'_{(0)} \otimes S(a'_{(1)})ha'_{(2)}h'$. In [6] s-a demonstrat ca $A[H]$ este izomorfa ca algebra cu produsul tensorial obisnuit $A \otimes H$.

Acest rezultat poate fi privit ca un caz particular al teoremei de invarianta la twistari, astfel: se considera $A' = A$, comodul algebra initiala, $B = H$, $R : H \otimes A \to A \otimes H$ aplicatia "flip", ρ este structura de comodul a lui A iar $\lambda : A \to A \otimes H$, $\lambda(a) = a_{(0)} \otimes S(a_{(1)})$. Se demonstreaza ca toate conditiile necesare aplicarii teoremei de invarianta la twistari sunt indeplinite, si atunci apare aplicatia de twistare $R' : H \otimes A \to A \otimes H$, $R'(h \otimes a) = a_{(0)} \otimes S(a_{(1)})ha_{(2)}$, avem in mod evident $A \otimes_{R'} H = A[H]$ si deci in final obtinem $A[H] \simeq A \otimes H$, q.e.d.

(iii) In [4] a fost generalizata teorema lui Majid mentionata anterior, inlocuind conditia de quasitriangularitate cu o conditie mai slaba, numita semiquasitriangularitate. Noi demonstram in acest articol ca la nivel de algebre este suficient sa avem doar o parte dintre axiomele unei structuri semiquasitriangulare pentru a avea izomorfismul dorit, iar acest fapt se obtine ca o consecinta a teoremei de invarianta la twistari. Pe scurt, daca H este o algebra Hopf finit dimensionala si $r \in H \otimes H$ este un element inversabil satisfacand anumite conditii, atunci pe H^* se poate introduce o anumita structura de algebra, notata cu $\underline{H}^*$, astfel incat dublul Drinfeld $D(H)$ este izomorf ca algebra cu un anumit produs tensorial twistat $\underline{H}^* \otimes_{R'} H$.

Articolul 4.

Exista exemple importante de "produse" de algebre care insa nu sunt produse tensoriale twistate, un exemplu tipic find produsul incrucisat (cu cociclu) din teoria algebrelor Hopf. O constructie foarte generala, care generalizeaza atat produsul tensorial twistat de algebre cat si produsul incrucisat (cu cociclu) din teoria algebrelor Hopf a fost introdus de catre Brzeziński in [2] (vom numi aceasta constructie "produs incrucisat Brzeziński") astfel: data o algebra (asociativa unitara) A, un spatiu vectorial V inzestrat cu un element distins 1_V si doua aplicatii lineare $\sigma : V \otimes V \to A \otimes V$ si $R : V \otimes A \to A \otimes V$ satisfacand anumite conditii, se poate introduce o structura de algebra pe $A \otimes V$, notata cu $A \otimes_{R,\sigma} V$ (si reciproc, orice structura de algebra asociativa pe $A \otimes V$ cu unitate $1_A \otimes 1_V$ si a carei multiplicare satisface $(a \otimes 1_V)(b \otimes v) = ab \otimes v$ pentru orice $a, b \in A$ si $v \in V$ apare in acest fel). Un produs tensorial twistat de algebre $A \otimes_R B$ este un produs incrucisat Brzeziński astfel: $A \otimes_R B = A \otimes_{R,\sigma} V$, unde $\sigma : B \otimes B \to A \otimes B$, $\sigma(b, b') = 1_A \otimes bb'$ pentru orice $b, b' \in B$.

Rezultatul principal din articol este o teorema de tip invarianta la twistari pentru produse incrucisate Brzeziński care generalizeaza teorema corespunzatoare pentru produse tensoriale twistate (mai precis, o anumita versiune "in oglinda" a sa):

Teorema. *Fie $(A, \mu, 1_A)$ o algebra si $A \otimes_{R,\sigma} V$ un produs incrucisat Brzeziński. Presupunem ca sunt date doua aplicatii lineare $\theta, \gamma : V \to A \otimes V$, cu notatie $\theta(v) = v_{<-1>} \otimes v_{<0>}$ si $\gamma(v) = v_{\{-1\}} \otimes v_{\{0\}}$. Definim aplicatiile $R' : V \otimes A \to A \otimes V$ si $\sigma' : V \otimes V \to A \otimes V$ astfel:*

$$R' = (\mu_2 \otimes id_V) \circ (id_A \otimes id_A \otimes \gamma) \circ (id_A \otimes R) \circ (\theta \otimes id_A),$$
$$\sigma' = (\mu \otimes id_V) \circ (id_A \otimes \gamma) \circ (\mu_2 \otimes id_V) \circ (id_A \otimes id_A \otimes \sigma) \circ (id_A \otimes R \otimes id_V) \circ (\theta \otimes \theta).$$

Presupunem ca urmatoarele conditii sunt satisfacute:

$$\theta(1_V) = 1_A \otimes 1_V, \quad \gamma(1_V) = 1_A \otimes 1_V,$$
$$v_{<-1>}v_{<0>_{\{-1\}}} \otimes v_{<0>_{\{0\}}} = 1_A \otimes v, \quad \forall\, v \in V,$$
$$v_{\{-1\}}v_{\{0\}_{<-1>}} \otimes v_{\{0\}_{<0>}} = 1_A \otimes v, \quad \forall\, v \in V,$$
$$(\mu \otimes id_V) \circ (\mu \otimes \sigma') \circ (id_A \otimes \gamma \otimes id_V) \circ (R \otimes id_V) \circ (id_V \otimes \gamma)$$
$$= (\mu \otimes id_V) \circ (id_A \otimes \gamma) \circ \sigma.$$

Atunci $A \otimes_{R',\sigma'} V$ este un produs incrucisat Brzeziński si exista un izomorphism de algebre $A \otimes_{R',\sigma'} V \simeq A \otimes_{R,\sigma} V$, $a \otimes v \mapsto av_{<-1>} \otimes v_{<0>}$.

Se demonstreaza apoi ca doua rezultate independente din literatura de specialitate pot fi obtinute drept consecinte ale acestei teoreme (aici vom descrie in detaliu doar primul dintre aceste rezultate):

(i) Fie H o quasi-bialgebra cu asociator Φ si $F \in H\otimes H$ o transformare "gauge", cu notatie $F = F^1\otimes F^2$ si $F^{-1} = G^1 \otimes G^2$. Consideram asa numitul Drinfeld twist al lui H, notat H_F, care este o quasi-bialgebra avand acelasi spatiu vectorial subiacent, multiplicare, unitate si counitate ca H dar comultiplicare si asociator definite prin

$$\Delta_F(h) = F\Delta(h)F^{-1}, \quad \Phi_F = (1 \otimes F)(id \otimes \Delta)(F)\Phi(\Delta \otimes id)(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1).$$

Vom nota $\Delta_F(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, $\Phi_F = \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^2 \otimes \tilde{X}^3$, $\Phi_F^{-1} = \tilde{x}^1 \otimes \tilde{x}^2 \otimes \tilde{x}^3$.

Fie B o H-modul algebra la dreapta, deci putem considera produsul smash $H\#B$, care este o algebra asociativa avand $H\otimes B$ drept spatiu vectorial subiacent, multiplicare $(h\#b)(h'\#b') = hh'_1x^1\#(b\cdot h'_2x^2)(b'\cdot x^3)$ si unitate $1_H\#1_B$ (am notat $\Phi = X^1\otimes X^2\otimes X^3$ si $\Phi^{-1} = x^1\otimes x^2\otimes x^3$ asociatorul lui H si inversul sau). S-a demonstrat in [3] ca daca se introduce o noua multiplicare pe B prin formula $b*b' = (b\cdot F^1)(b'\cdot F^2)$ si se noteaza aceasta structura cu $_FB$, atunci $_FB$ devine o H_F-modul algebra la dreapta cu aceeasi unitate si H-actiune ca pentru B si exista un izomorfism de algebre $H_F\#_FB \simeq H\#B$, $h\#b \mapsto hF^1\#b\cdot F^2$. Acest rezultat poate fi privit ca o consecinta a Teoremei, astfel: intrucat $H\#B$ este o algebra asociativa cu unitate $1_H\#1_B$ iar multiplicarea sa satisface $(h\#1_B)(h'\#b') = hh'\#b'$, pentru orice $h, h' \in H$ si $b \in B$, rezulta ca $H\#B$ este un produs incrucisat Brzeziński, anume $H\#B = H \otimes_{R,\sigma} B$, unde aplicatiile R, σ sunt definite, pentru orice $b, b' \in B$ si $h \in H$, prin formulele $R : B \otimes H \to H \otimes B$, $R(b \otimes h) = h_1 \otimes b \cdot h_2$ si $\sigma : B \otimes B \to H \otimes B$, $\sigma(b, b') = x^1 \otimes (b \cdot x^2)(b' \cdot x^3)$. Similar, avem $H_F\#_FB = H \otimes_{R_F,\sigma_F} B$, unde $R_F(b \otimes h) = h_{(1)} \otimes b \cdot h_{(2)}$ si $\sigma_F(b, b') = \tilde{x}^1 \otimes (b \cdot \tilde{x}^2) * (b' \cdot \tilde{x}^3)$. Daca definim $\theta, \gamma : B \to H \otimes B$ prin formulele $\theta(b) = F^1 \otimes b \cdot F^2$ si $\gamma(b) = G^1 \otimes b \cdot G^2$, pentru orice $b \in B$, se arata ca ipotezele Teoremei sunt indeplinite pentru produsul incrucisat Brzeziński $H \otimes_{R,\sigma} B$ si aplicatiile θ, γ si ca aplicatiile R', σ' date de Teorema coincid cu aplicatiile R_F si respectiv σ_F, asadar Teorema implica $H \otimes_{R_F,\sigma_F} B \simeq H \otimes_{R,\sigma} B$, adica $H_F\#_FB \simeq H\#B$, q.e.d.

(ii) Al doilea rezultat ce poate fi privit drept consecinta a Teoremei este ceea ce se numeste "echivalenta produselor incrucisate dupa o coalgebra" (datorat lui Brzeziński), care generalizeaza echivalenta produselor incrucisate (cu cociclu) din teoria algebrelor Hopf.

Articolul 5.

Produsul L-R-smash a fost introdus in [8] astfel: daca H este o bialgebra, $\mathcal{A}$ o H-bimodul algebra si $\mathbb{A}$ o H-bicomodul algebra, produsul L-R-smash $\mathcal{A} \natural \mathbb{A}$ este o structura de algebra asociativa definita pe $\mathcal{A} \otimes \mathbb{A}$ prin regula de multiplicare $(\varphi \natural u)(\varphi' \natural u') = (\varphi \cdot u'_{<1>})(u_{[-1]} \cdot \varphi') \natural u_{[0]}u'_{<0>}$, pentru $\varphi, \varphi' \in \mathcal{A}$ si $u, u' \in \mathbb{A}$. Produsul smash uzual $A\#H$ (unde A este o H-modul algebra la stanga) este un caz particular, anume $A\#H = A \natural H$ daca privim A drept o H-bimodul algebra cu actiunea la dreapta triviala.

Acest produs L-R-smash nu este insa un exemplu de produs tensorial twistat de algebre. A aparut astfel problema naturala de a introduce o constructie mai generala, care sa contina atat produsul L-R-smash cat si produsul tensorial twistat de algebre drept cazuri particulare. Aceasta constructie este introdusa in acest articol, sub denumirea de produs tensorial L-R-twistat de algebre, astfel: daca A si B sunt doua algebre (asociative unitare) si $R : B \otimes A \to A \otimes B$, $Q : A \otimes B \to A \otimes B$ sunt doua aplicatii lineare, cu notatie $R(b \otimes a) = a_R \otimes b_R$, $Q(a \otimes b) = a_Q \otimes b_Q$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$, satisfacand o anumita lista de conditii, atunci multiplicarea definita pe $A \otimes B$ prin $(a \otimes b)(a' \otimes b') = a_Qa'_R \otimes b_Rb'_Q$ este asociativa (si $1_A \otimes 1_B$ este unitate). Aceasta structura de algebra va fi notata $A\ {}_Q\otimes_R B$. Cazul $Q = id_{A\otimes B}$ revine la produsul tensorial twistat obisnuit.

In Sectiunea 2 a articolului se demonstreaza cateva proprietati ale acestei constructii, dintre care mentionam:

Propozitie. *Fie $A\ {}_Q\otimes_R B$ un produs tensorial L-R-twistat astfel incat Q este bijectiva cu inversa Q^{-1}. Atunci aplicatia $P : B \otimes A \to A \otimes B$, $P = Q^{-1} \circ R$, este o aplicatie de twistare, si avem un izomorfism de algebre $Q : A \otimes_P B \to A\ {}_Q\otimes_R B$. Asadar, un produs tensorial L-R-twistat in care aplicatia Q este bijectiva este izomorf cu un produs tensorial twistat obisnuit.*

In Sectiunea 3 se studiaza posibilitatea de a itera aceasta constructie. Se demonstraza mai intai un rezultat de acest tip pentru produse L-R-smash. Anume:

Propozitie *Fie H o bialgebra, A o algebra in categoria monoidala $\mathcal{LR}(H)$ a bimodulelor Yetter-Drinfeld-Long si $\mathcal{A}$ o H-bimodul algebra. Atunci:*

(i) $\mathcal{A} \natural A$ *este o* H*-bimodul algebra, cu structurile de* H*-modul date de formulele* $h\cdot(\varphi \natural a) = h_1\cdot\varphi \natural h_2\cdot a$ *si* $(\varphi \natural a)\cdot h = \varphi\cdot h_2 \natural a\cdot h_1$*, pentru* $\varphi \in \mathcal{A}$*,* $a \in A$*,* $h \in H$*.*

(ii) $A \natural H$ *este o* H*-bicomodul algebra, cu structurile de* H*-comodul date de formulele*

$$\lambda : A \natural H \to H \otimes (A \natural H), \quad \lambda(a \natural h) = a^{(-1)}h_1 \otimes (a^{(0)} \natural h_2) := (a \natural h)_{[-1]} \otimes (a \natural h)_{[0]},$$
$$\rho : A \natural H \to (A \natural H) \otimes H, \quad \rho(a \natural h) = (a^{<0>} \natural h_1) \otimes h_2 a^{<1>} := (a \natural h)_{<0>} \otimes (a \natural h)_{<1>}.$$

(iii) Algebrele $(\mathcal{A} \natural A) \natural H$ *si* $\mathcal{A} \natural (A \natural H)$ *coincid.*

Avand drept sursa de inspiratie acest rezultat si teorema de iterare a produselor tensoriale twistate, se obtine o teorema de iterare pentru produse L-R-twistate:

Teorema *Fie* $A\ {}_{Q_1}\otimes_{R_1} B$*,* $B\ {}_{Q_2}\otimes_{R_2} C$*,* $A\ {}_{Q_3}\otimes_{R_3} C$ *trei produse L-R-twistate de algebre, astfel incat aplicatiile* $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3$ *satisfac o anumita lista de conditii. Definim aplicatiile*

$$T_1 : C \otimes (A \otimes B) \to (A \otimes B) \otimes C, \quad T_1(c \otimes (a \otimes b)) = (a_{R_3} \otimes b_{R_2}) \otimes (c_{R_3})_{R_2},$$
$$V_1 : (A \otimes B) \otimes C \to (A \otimes B) \otimes C, \quad V_1((a \otimes b) \otimes c) = (a_{Q_3} \otimes b_{Q_2}) \otimes (c_{Q_3})_{Q_2},$$
$$T_2 : (B \otimes C) \otimes A \to A \otimes (B \otimes C), \quad T_2((b \otimes c) \otimes a) = (a_{R_3})_{R_1} \otimes (b_{R_1} \otimes c_{R_3}),$$
$$V_2 : A \otimes (B \otimes C) \to A \otimes (B \otimes C), \quad V_2(a \otimes (b \otimes c)) = (a_{Q_3})_{Q_1} \otimes (b_{Q_1} \otimes c_{Q_3}).$$

Atunci $(A\ {}_{Q_1}\otimes_{R_1} B)\ {}_{V_1}\otimes_{T_1} C$ *si* $A\ {}_{V_2}\otimes_{T_2} (B\ {}_{Q_2}\otimes_{R_2} C)$ *sunt produse tensoriale L-R-twistate care in plus coincid ca algebre.*

In Sectiunea 3 se demonstreaza o teorema de tip invarianta la twistari pentru produse tensoriale L-R-twistate, care generalizeaza in acelasi timp invarianta la twistari pentru produse tensoriale twistate obisnuite si invarianta la twistari pentru produse L-R-smash.

Articolul 6.

Exista multiple motivatii pentru a introduce constructii similare produsului tensorial twistat pentru alte tipuri de algebre decat cele asociative. De exemplu, s-a introdus un produs tensorial twistat pentru asa numitele quasialgebre (adica algebre in categorii monoidale; intrucat asociatorii acestor categorii pot fi netriviali, aceste quasialgebre pot fi neasociative).

In acest articol se introduce un alt tip de produs tensorial twistat pentru algebre neasociative. Punctul de plecare a fost urmatorul. Fie B o algebra (nu neaparat asociativa) inzestrata cu o involutie $\sigma : B \to B$ si q un element nenul in corpul de baza K; atunci algebra Cayley-Dickson $\overline{B}(q)$ este o structura de algebra pe $B \oplus B$, ale carei elemente se scriu in mod unic drept $a + vb$, cu $a, b \in B$, unde v este un simbol care satisface relatia $v^2 = q1$, si a carei multiplicare este definita prin $(a + vb)(c + vd) = (ac + qd\sigma(b)) + v(\sigma(a)d + cb)$, pentru $a, b, c, d \in B$. Daca notam cu $C(K, q)$ algebra (asociativa) 2-dimensionala $C(K, q) := K[v]/(v^2 - q)$, este clar ca $\overline{B}(q)$ poate fi identificat ca spatiu vectorial cu $C(K, q) \otimes B$, iar multiplicarea lui $\overline{B}(q)$ depinde cumva de multiplicarile lui $C(K, q)$ si B. Scopul nostru initial a fost de a da un sens precis acestei afirmatii, mai precis am dorit sa exprimam $\overline{B}(q)$ ca un fel de produs tensorial twistat intre $C(K, q)$ si B (mentionam faptul ca algebra octonionilor si celelalte algebre Cayley sunt algebre de tipul $\overline{B}(q)$).

Constructia generala pe care o introducem este urmatoarea (toate algebrele care vor aparea vor fi considerate impreuna cu o descompunere data si fixata ca suma directa de spatii vectoriale $A = K \cdot 1_A \oplus A_0$). Fie A si B doua algebre (nu neaparat asociative) si $R : B \otimes A \to A \otimes B$ o aplicatie lineara, cu notatie de tip Sweedler $R(b \otimes a) = a_R \otimes b_R$, pentru $a \in A$, $b \in B$. Presupunem ca urmatoarele conditii sunt indeplinite (notam cu r o alta copie a lui R):

$$R(1_B \otimes a) = a \otimes 1_B, \quad R(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b, \quad \forall\ a \in A,\ b \in B,$$
$$R(b \otimes aa') = a_R a'_r \otimes (b_R)_r, \quad \forall\ a, a' \in A,\ b \in B,$$
$$R(bb' \otimes a) = (a_R)_r \otimes b'_R b_r, \quad \forall\ a \in A_0,\ b, b' \in B.$$

Consideram multiplicarea pe spatiul vectorial $A \otimes B$ definita in mod unic de formulele

$$(1_A \otimes b)(a' \otimes b') = a'_R \otimes b_R b', \quad \forall\ a' \in A,\ b, b' \in B,$$
$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa'_R \otimes b' b_R, \quad \forall\ a \in A_0,\ a' \in A,\ b, b' \in B.$$

Aceasta structura de algebra pe $A \otimes B$ va fi numita "produsul tensorial twistat alternativ" al lui A si B si va fi notata cu $A \overline{\otimes}_R B$; aplicatia R ce satisface cele trei conditii de mai sus va fi numita "aplicatie de twistare alternativa". Evident $1_A \otimes 1_B$ este unitate pentru $A\overline{\otimes}_R B$. Daca algebrele A si B sunt asociative iar B este comutativa, atunci produsul tensorial twistat alternativ $A\overline{\otimes}_R B$ coincide cu produsul tensorial twistat obisnuit $A \otimes_R B$ si deci este o algebra asociativa.

Daca $\overline{B}(q)$ este o algebra Cayley-Dickson, consideram aplicatia lineara $R : B \otimes C(K,q) \to C(K,q) \otimes B$ unic definita de formulele $R(b \otimes 1) = 1 \otimes b$, $R(b \otimes v) = v \otimes \sigma(b)$, pentru orice $b \in B$. Se demonstreaza atunci ca R este o aplicatie de twistare alternativa si avem un izomorfism de algebre $\overline{B}(q) \simeq C(K,q)\overline{\otimes}_R B$, $a+vb \mapsto 1\otimes a + v \otimes b$, pentru orice $a, b \in B$. De asemenea, se demonstreaza ca algebrele obtinute prin ceea ce se numeste "proces Clifford" se pot exprima drept anumite produse tensoriale twistate alternative.

Se cunoaste faptul ca algebrele Cayley-Dickson admit inca un tip de prezentare, diferita de cea de mai sus dar echivalenta cu ea. Se demonstreaza in articol ca acest fapt poate fi privit ca un caz particular al unei anumite proprietati generale a produselor tensoriale twistate alternative.

Fie B o algebra si $\sigma : B \to B$ o involutie. Se stie ca aplicatia $\overline{\sigma} : \overline{B}(q) \to \overline{B}(q)$, $\overline{\sigma}(a + vb) = \sigma(a) - vb$, pentru orice $a, b \in B$, este o involutie pentru algebra Cayley-Dickson $\overline{B}(q)$. Se demonstreaza in articol ca acest fapt este un caz particular al urmatoarei proprietati generale a produselor tensoriale twistate alternative:

Teorema: Fie $A\overline{\otimes}_R B$ un produs tensorial twistat alternativ de algebre si $\sigma_A : A \to A$ si $\sigma_B : B \to B$ doua involutii; definim aplicatia $\overline{\sigma} : A \otimes B \to A \otimes B$, $\overline{\sigma} := R \circ (\sigma_B \otimes \sigma_A) \circ \tau_{A,B}$. Presupunem ca R satisface urmatoarele conditii:

$$
\begin{aligned}
&(id_A \otimes \tau_{B,B}) \circ (R \otimes id_B) \circ (id_B \otimes R) = (R \otimes id_B) \circ (id_B \otimes R) \circ (\tau_{B,B} \otimes id_A),\\
&R(B \otimes A_0) \subseteq A_0 \otimes B,\\
&\sigma_A(A_0) \subseteq A_0,\\
&\overline{\sigma}^2 = id_{A \otimes B}.
\end{aligned}
$$

Atunci $\overline{\sigma}$ este o involutie pentru $A\overline{\otimes}_R B$.

In ultima sectiune a articolului se introduce, cu ajutorul produsului tensorial twistat alternativ, o constructie care asociaza unei algebre B inzestrate cu o involutie "tare" σ o algebra $\overline{B}(q,r)$ (unde q, r sunt scalari nenuli), avand dimensiunea $3 \cdot dim(B)$ si care contine algebrele Cayley-Dickson $\overline{B}(q)$ si $\overline{B}(r)$ drept subalgebre. Spre deosebire de $\overline{B}(q)$ (care este alternativa daca B este asociativa), $\overline{B}(q,r)$ nu este niciodata alternativa. Dar, exact ca in cazul algebrelor Cayley-Dickson, $\overline{B}(q,r)$ este intotdeauna asociativa in puteri, este flexibila daca si numai daca B este flexibila si daca norma lui B este nedegenerata atunci si norma lui $\overline{B}(q,r)$ este nedegenerata.

Articolul 7.

Un TQFT 2-dimensional este o prescriptie ce asociaza fiecarei varietati M de dimensiune 1 un spatiu vectorial V_M si fiecarui cobordism intre varietatile M si N un morfism intre V_M si V_N. In plus aceasta asociere trebuie sa fie functoriala si sa satisfaca anumite conditii. Cum orice varietate de dimensiune 1 este o reuniune de sfere 1-dimensionale, pentru a determina TQFT-ul pe varietati este suficient sa stim ce asociem sferei S^1. De asemenea orice cobordism poate fi obtinut prin lipirea unor cobordisme elementare si anume: discuri, discuri cu o gaura si discuri cu doua gauri. In consecinta valoarea TQFT-ului pe cobordisme este determinata de valorea pe aceste cobordisme elementare. Plecand de la aceasta observatie se demonstreaza ca oricarui TQFT i se poate asocia o algebra Frobenius comutativa si oricarei algebre Frobenius i se poate asocia un TQFT. Cu alte cuvinte categoria TQFT-urilor este echivalenta cu categoria algebrelor Frobenius comutative.

Fie X un spatiu topologic. O X-varietate este o varietate M impreuna cu un morfism $g_M : M \to X$. Un X-HQFT 2-dimensional poate fi vazut ca un TQFT pentru X-varietati si X-cobordisme. In cazul in care $X = K(G, 1)$ sau $X = K(A, 2)$ atunci X-HQFT-urile au fost caracterizate in functie de anumite structuri numite G-algebre Frobenius twistate si respectiv A-algebre Frobenius.

In acest articol abordam problema clasificarii X-HQFT-urilor in cazul in care spatiul topologic X are primele doua grupuri de omotopie netriviale (i.e. $\pi_1(X) \neq 1$ si $\pi_2(X) \neq 0$). In plus primul k-invariant κ_X^3 poate fi netrivial. Pentru studiul acestor X-HQFT introducem notiunea de (G, A, κ)-algebra Frobenius twistata, unde G este un grup, A este un G-modul si $\kappa \in H^3(G, A)$. Apoi aratam ca oricarui X-HQFT (V, τ) i se poate asocia o $(\pi_1(X), \pi_2(X), \kappa^3)$-algebra Frobenius twistata V^τ. Mai mult, X-HQFT-ul este complet determinat de aceasta algebra.

Articolul 8.

Grupurile simpliciale sunt obiecte pur algebrice folosite in topologia algebrica la formularea teoremelor de clasificare a spatiilor topologice. La fel ca pentru spatii topologice, unui grup simplicial K i se pot asocia grupurile de omotopie $\pi_i(K)$. Un grup simplicial Eilenberg-MacLane de tip $K(G,n)$ este un grup simplicial cu proprietatea ca $\pi_i(K(G,n)) = 0$ daca $i \neq n$ si $\pi_n(K(G,n)) = G$. Cu alte cuvinte un grup simplicial $K(G,n)$ este modelul algebric ce corespunde unui spatiu topologic de tip $K(G,n)$. Pentru un grup abelian A fixat, sunt cunoscute prezentari explicite ale grupului simplicial $K(A,n)$. Din pacate insa interpretarea topologica nu este transparenta si in plus prezentarea in sine este destul de greoaie.

In acest articol introducem o noua prezentare a grupului simplicial $K(A,n)$. Avantajul pricipal al prezentarii este ca interpretarea topologica a constructiei este foarte clara. In plus constructia are o descriere foarte simpla in functie de generatorii categoriei simpliciale Δ. De semenea in articol discutam posibile aplicatii si generalizari.

Khalkhali si Rangipour au construit un exemplu de modul ciclic $H^{(\sigma,\delta)}$ asociat unei algebre Hopf H si unei perechi in involutie (σ,δ). In articol aratam ca daca algebra Hopf H este cocomutativa atunci obiectul ciclic $H^{(1,\varepsilon)}$ este obtinut ca restrictia unui obiect simetric. Mai exact actiunea grupului ciclic Z_{n+1} pe $H^{\otimes n}$ este restrictia unei actiuni a grupului simetric Σ_{n+1} pe $H^{\otimes n}$. Daca algebra Hopf H este algebra grupala $k[G]$ asociata unui grup G atunci obiectul ciclic $k[G]^{(1,\varepsilon)}$ poate fi vazut ca o linearizare a grupului simplicial $K(G,1)$. Aceaste observatie a fost punctul de plecare pentru o constructie care asocieza unei algebre Hopf comutative H un modul ciclic ${}_2K(H)$. In cazul in care H este algebra grupala $k[A]$ asociata unui group comutativ A, modulul ciclic ${}_2K(H)$ este linearizarea grupului simplicial $K(A,2)$. O posibila aplicatie a acestui exemplu ar fi generalizarea rezultatelor obtinute de Connes si Moscovici legate de cooomologia ciclica a algebrelor Hopf. Pentru aceasta un pas important ar fi construirea unui analog al rezolutiei bar. Ne propunem sa abordam aceasta problema intr-un articol viitor.

Articolul 9.

O categorie simetrica este o categorie monoidala $\mathcal{C}$ inzestrata cu o familie de izomorfisme naturale $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ satisfacand conditii naturale de "bilinearitate" impreuna cu relatia de simetrie $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{C}$. Acest concept (clasic) a fost generalizat de Joyal si Street, care au renuntat la conditia de simetrie, ajungand astfel la conceptul de categorie braided, de importanta centrala astazi in teoria groupurilor cuantice.

In lucrarea [7] a fost definit conceptul de braiding pseudosimetric, ca o generalizare a braidingurilor simetrice. Un braiding c intr-o categorie monoidala $\mathcal{C}$ este pseudosimetric daca satisface urmatoarea relatie (un fel de relatie braid modificata):

$$(c_{Y,Z} \otimes id_X) \circ (id_Y \otimes c^{-1}_{Z,X}) \circ (c_{X,Y} \otimes id_Z) \quad = \quad (id_Z \otimes c_{X,Y}) \circ (c^{-1}_{Z,X} \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes c_{Y,Z}),$$

pentru orice obiecte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Rezultatul principal din [7] spune ca, daca H este o algebra Hopf cu antipod bijectiv, atunci braidingul canonic al categoriei de module Yetter-Drinfeld ${}_H\mathcal{Y}D^H$ este pseudosimetric daca si numai daca H este comutativa si cocomutativa.

Este binecunoscut faptul ca, pe mai multe planuri, categoriile braided corespund grupurilor braid B_n, in vreme ce categoriile simetrice corespund grupurilor simetrice S_n. Era natural sa ne asteptam ca exista anumite grupuri care corespund, in acelasi fel, categoriilor pseudosimetrice. Intr-adevar, aceste grupuri sunt introduse si studiate in acest articol.

Fie $n \geq 3$ un numar natural. Notam cu B_n grupul braid cu n fire, cu prezentarea uzuala: generatori σ_i, cu $1 \leq i \leq n-1$, si relatii

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad \textit{pentru } |i-j| \geq 2, \tag{0.1}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad \textit{pentru } 1 \leq i \leq n-2. \tag{0.2}$$

Propozitie. *Pentru $1 \leq i \leq n-2$, urmatoarele relatii sunt echivalente in B_n:*

$$\sigma_i\sigma^{-1}_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma^{-1}_i\sigma_{i+1}, \tag{0.3}$$

$$\sigma^2_i\sigma^2_{i+1} = \sigma^2_{i+1}\sigma^2_i. \tag{0.4}$$

Definitie. *Pentru un numar natural $n \geq 3$, definim* **grupul pseudosimetric** *PS_n drept grupul cu generatorii σ_i, cu $1 \leq i \leq n-1$, si relatiile (0.1), (0.2) si (0.3), sau echivalent cu relatiile (0.1), (0.2) si (0.4).*

Propozitie. *Pentru $1 \le i \le n-2$ consideram in PS_n elementele $p_i := \sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}$ si $q_i := \sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}$. Atunci avem urmatoarele relatii in PS_n: $p_i^3 = q_i^3 = (p_iq_i)^3 = 1$, pentru orice $1 \le i \le n-2$.*

Consideram acum grupul simetric S_n cu prezentarea uzuala: generatorii s_i, cu $1 \le i \le n-1$, si relatiile (0.1), (0.2) si $s_i^2 = 1$, pentru orice $1 \le i \le n-1$. Notam $\pi : B_n \to S_n$, $\beta : B_n \to PS_n$, $\alpha : PS_n \to S_n$, surjectiile canonice definite prin $\pi(\sigma_i) = s_i$, $\alpha(\sigma_i) = s_i$, $\beta(\sigma_i) = \sigma_i$, pentru orice $1 \le i \le n-1$. Evident, avem $\pi = \alpha \circ \beta$, deci in particular obtinem $Ker(\alpha) = \beta(Ker(\pi))$. Notam ca de obicei $Ker(\pi) = P_n$, grupul de braiduri pure cu n fire.

Rezultatul principal al articolului, care determina structura grupului PS_n, este urmatorul (pentru un grup G notam cu G' subgrupul comutator):

Teorema. *Nucleul $\mathfrak{P}_n$ al morfismului $\alpha : PS_n \to S_n$ este abelian. Mai mult, $\mathfrak{P}_n \simeq P_n/P_n' \simeq \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. In consecinta, avem un izomorfism de grupuri $PS_n \simeq B_n/P_n'$.*

Intrucat $\mathfrak{P}_n$ este abelian, avem o extensie de grupuri cu nucleu abelian $1 \to \mathfrak{P}_n \to PS_n \to S_n \to 1$, despre care se demonstreaza ca *nu* este splitata. Dupa cum stim, aceasta extensie corespunde unui element din grupul de coomologie $H^2(S_n, \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}})$. Pentru $n = 3$ se calculeaza explicit 2-cociclul care corespunde extensiei.

Se stie ca grupurile braid B_n sunt liniare (Bigelow 2001, Krammer 2002). Folosind o metoda de demonstratie similara celei a lui Krammer, se demonstreaza ca si grupurile PS_n sunt liniare.

In ultima sectiune a lucrarii se expliciteaza legatura dintre grupurile pseudosimetrice si categoriile pseudosimetrice, pe doua planuri: pe de o parte, se construieste o categorie pseudosimetrica $\mathcal{PS}$ asociata grupurilor PS_n in acelasi fel in care categoria braid $\mathcal{B}$ este asociata grupurilor B_n, iar pe de alta parte se arata ca, daca $\mathcal{C}$ este o categorie pseudosimetrica cu braiding c, n este un numar natural si V este un obiect in $\mathcal{C}$, atunci exista un morfism de grupuri $PS_n \to Aut(V^{\otimes n})$, asadar categoriile pseudosimetrice furnizeaza reprezentari ale grupurilor pseudosimetrice.

Bibliografie

[1] M. Beattie, C.-Y. Chen, J. J. Zhang, Twisted Hopf comodule algebras, *Comm. Algebra* **24** (1996), 1759–1775.

[2] T. Brzeziński, Crossed products by a coalgebra, *Comm. Algebra* **25** (1997), 3551–3575.

[3] D. Bulacu, F. Panaite, F. Van Oystaeyen, Generalized diagonal crossed products and smash products for quasi-Hopf algebras. Applications, *Comm. Math. Phys.* **266** (2006), 355–399.

[4] C. Di Luigi, J. A. Guccione, J. J. Guccione, Brzeziński's crossed products and braided Hopf crossed products, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3563–3580.

[5] P. Jara Martínez, J. López Peña, F. Panaite, F. Van Oystaeyen, On iterated twisted tensor products of algebras, *Internat. J. Math.* **19** (2008), 1053–1101.

[6] C. Năstăsescu, F. Panaite, F. Van Oystaeyen, External homogenization for Hopf algebras. Applications to Maschke's theorem, *Algebr. Represent. Theory* **2** (1999), 211–226.

[7] F. Panaite, M. D. Staic, F. Van Oystaeyen, Pseudosymmetric braidings, twines and twisted algebras, arXiv:math.QA/08012055.

[8] F. Panaite, F. Van Oystaeyen, L-R-smash product for (quasi-) Hopf algebras, *J. Algebra* **309** (2007), 168–191.

Prof. dr. Dragos STEFAN

Bucuresti, 18.11.2010